Algebra und Diskrete Mathematik für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Übungsaufgaben

1) Man überprüfe die Gleichung

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

für die ersten fünf natürlichen Zahlen und beweise sodann deren Gültigkeit für alle natürlichen Zahlen durch vollständige Induktion.

2) Man zeige, dass $n^3 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stets durch 3 teilbar ist, mittels

(a) eines direkten Beweises,

(b) eines Beweises durch vollständige Induktion.

3) Man zeige durch vollständige Induktion, dass $7^n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

4–13) Man beweise mittels vollständiger Induktion:

4)

$$\sum_{j=2}^{n} j(j-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \quad (n \geq 2)$$

5)

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1} \quad (n \geq 1)$$

6) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j2^j = 2^{n+1}(n-1) + 2 \quad (n \geq 0)$

7) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j3^{j-1} = \frac{3^n(2n-1)+1}{4} \quad (n \geq 1)$

8)

$$\sum_{k=1}^{n} k5^k = \frac{5}{16}(n5^{n+1} - (n+1)5^n + 1) \quad (n \geq 1)$$

9)

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{l}{3^l} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

10) Ist $a_0 = 0$ und $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

11) Ist $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

12) Ist $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ und $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

13) Ist $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

14) Man zeige mittels vollständiger Induktion, dass für die rekursiv definierte Folge $x_1 = 1$ und $x_{k+1} = x_k + 8k$ für $k \geq 1$ allgemein gilt:

$$x_n = (2n-1)^2, \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

15) Man zeige mittels vollständiger Induktion, dass für die rekursiv definierte Folge $x_0 = 1$ und $x_{k+1} = x_k + 18k + 15$ für $k \geq 0$ allgemein gilt:

$$x_n = (3n+1)^2, \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

16) Man zeige mittels vollständiger Induktion, dass für die rekursiv definierte Folge $x_0 = 1$ und $x_{k+1} = ax_k + b$ für $k \geq 0$ (wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$) allgemein gilt:

$$x_n = a^n + b\frac{a^n - 1}{a-1}, \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

17) a_n sei die größte Anzahl von Teilen, in die die Ebene durch n Geraden zerlegt werden kann. Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $a_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$.

18–21) Man untersuche mittels vollständiger Induktion, für welche $n \geq 0$ die angegebene Ungleichung gilt:

18) $9n^3 - 3 \leq 8^n$

19) $4n^2 \leq 2^n$

20) $3n + 2^n \leq 3^n$

21) $(n+1)3^n \leq 4^n$

22) Man zeige für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\sum_{j=1}^{k} b_j$.

23) Wo steckt der Fehler im Induktions-„Beweis“ der folgenden Behauptung:
Ist in einer Gruppe von Personen eine Person blond, so sind alle blond.
Beweis: a) $n = 1$: Hier stimmt die Behauptung trivialerweise.
b) Die Behauptung gelte für Gruppen der Größe n.
Nun sei von $n+1$ Personen eine blond. Man betrachte diese Person zusammen mit $n-1$ weiteren. Dann sind nach Induktionsannahme diese $n-1$ Personen auch blond. Folglich ist in der Gruppe dieser $n-1$ Personen zusammen mit der noch nicht betrachteten Personen wieder wenigstens eine blond, woraus folgt, daß auch diese letzte Person blond sein muss.

24) Wo steckt der Fehler im Induktions-„Beweis“ der folgenden Behauptung:
Je zwei natürliche Zahlen a, b sind gleich groß.
Beweis: Vollständige Induktion nach dem $\max\{a, b\}$.
a) $\max\{a, b\} = 0$: Hier gilt $a = b = 0$.
b) Die Behauptung gelte für $\max\{a, b\} = n$.
Sei nun $\max\{a, b\} = n+1$. Dann ist $\max\{a-1, b-1\} = n$, und es folgt aus der Induktionsvoraussetzung b), dass $a - 1 = b - 1$ ist, womit aber auch $a = b$ gilt.

25) Zeigen Sie, dass $\sqrt{3}$ irrational ist.

26) Zeigen Sie, dass $\sqrt{5}$ irrational ist.

27) Zeigen Sie, dass $\sqrt{6}$ irrational ist.

28) Zeigen Sie, dass $\sqrt{10}$ irrational ist.

29) Zeigen Sie, dass $\sqrt{30}$ irrational ist.

30) Zeigen Sie, dass $\sqrt{42}$ irrational ist.

31) Man finde alle sechsten Wurzeln von $z = 8i$ in $\mathbb{C}$ und stelle sie in der Gaußschen Zahlenebene dar.

32) Man finde alle sechsten Wurzeln von $z = -27$ in $\mathbb{C}$ und stelle sie in der Gaußschen Zahlenebene dar.

33) Man bestimme rechnerisch (ohne Taschenrechner) und graphisch Summe und Produkt der komplexen Zahlen $z_1 = 3 - 4i$ und $z_2 = [2, \frac{\pi}{2}]$.

34) Wie bei 33) für $z_1 = 4 + 5i$ und $z_2 = [2, -\frac{\pi}{4}]$.

35) Wie bei 33) für $z_1 = 5 + 2i$ und $z_2 = [3, \frac{\pi}{2}]$.

36) Man berechne ohne Taschenrechner alle Werte von $\sqrt[4]{1+i}$ in der Form $[r, \varphi]$.

37) Wie bei 36) für $\sqrt[5]{18 - 6\sqrt{3}i}$.

38) Wie bei 36) für $\sqrt[3]{-i}$.

39) Wie bei 36) für $\sqrt[5]{\sqrt{2} - \sqrt{6}i}$.

40) Man beweise $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ und $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

41) Man beweise $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

42) Stellen Sie alle Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 + 2z + 4 = 0$ sowohl in der Form $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, als auch in Polarkoordinatenform $r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, dar.

43) Wie Bsp. 42) für $z^2 + 4z + 8 = 0$.

44) Für welche komplexe Zahlen gilt $\overline{z} = \frac{1}{z}$?

45) Man zeige $\left|\frac{z_1 + z_2}{2}\right|^2 + \left|\frac{z_1 - z_2}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

46) Man beschreibe die Menge jener komplexen Zahlen z, die $\mathfrak{Re}\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0$ erfüllen ($a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$), geometrisch.

47) Man beschreibe die Menge jener komplexen Zahlen z, die $\mathfrak{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0$ erfüllen ($a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$), geometrisch.

48–49) Welche Teilmenge der komplexen Zahlenebene beschreibt die angegebene Ungleichung?

48) $\left|\frac{z+4}{z-4}\right| < 3$

49) $\left|\frac{z+5}{z}\right| < 4$

50) Man berechne alle Werte von $\sqrt{7 + 24i} = a + bi$ ohne Benützung der trigonometrischen Darstellung. (Hinweis: Man quadriere die zu lösende Gleichung und vergleiche Real- und Imaginärteile.)

51) Wie Bsp. 50) für $\sqrt{8 - 6i} = a + bi$.

52) Man bestimme den $\mathrm{ggT}(7469, 2464)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

53) Man bestimme den $\mathrm{ggT}(1109, 4999)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

54) Man bestimme den $\mathrm{ggT}(2008, 6318)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

55) Man bestimme den $\mathrm{ggT}(2007, 8367)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

56) Man bestimme den $\mathrm{ggT}(2107, 9849)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

57) Man bestimme zwei ganze Zahlen x, y, welche die Gleichung $243x + 198y = 9$ erfüllen.

58) Man bestimme zwei ganze Zahlen x, y, welche die Gleichung $451x + 176y = 11$ erfüllen.

59) Man zeige für natürliche Zahlen a, b die Eigenschaft $\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b) = a \cdot b$.

60) Man zeige, dass jede ganze Zahl der Form $n^4 + 4^n$ (mit $n > 1$) keine Primzahl ist. (Hinweis: Man unterscheide zwischen geradem und ungeradem n. Insbesondere betrachte man bei ungeradem n die Zerlegung $(n^2 + 2^n + n2^{(n+1)/2})(n^2 + 2^n - n2^{(n+1)/2})$.)

61) Sei n eine beliebige positive natürliche Zahl und $N = 12n - 1$. Man zeige, dass die Summe aller Teiler von N durch 12 teilbar ist.

62–67) Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Kongruenzen bzw. beweisen Sie die Unlösbarkeit (in $\mathbb{Z}$):

62) a) $8x \equiv 4 \mod 16$, b) $8x \equiv 4 \mod 15$.

63) a) $6x \equiv 3 \mod 9$, b) $6x \equiv 4 \mod 9$.

64) a) $3x \equiv 9 \mod 11$, b) $3x \equiv 9 \mod 12$.

65) a) $x^2 \equiv 1 \mod 3$, b) $x^2 \equiv 1 \mod 5$.

66) a) $x^2 \equiv 2 \mod 5$, b) $x^2 \equiv 2 \mod 7$.

67) a) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \mod 5$, b) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \mod 6$.

68) Man beweise die folgenden Regeln für das Rechnen mit Kongruenzen:

(a) $a \equiv b \mod m,\ c \equiv d \mod m \Rightarrow a + c \equiv b + d \mod m$

(b) $a \equiv b \mod m,\ c \equiv d \mod m \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot d \mod m$

(c) $ac \equiv bc \mod mc,\ c \neq 0 \Rightarrow a \equiv b \mod m$

69) Im europäischen Artikelnummernsystem EAN werden Zahlen mit 13 Dezimalziffern der Form $a_1\, a_2 \ldots a_{12}\, p$ verwendet. Dabei wird die letzte der 13 Ziffern, das ist die Prüfziffer p, im EAN-Code so bestimmt, dass

$$a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + \cdots + a_{11} + 3a_{12} + p \equiv 0 \mod 10$$

gilt. Man zeige, dass beim EAN-Code ein Fehler in einer einzelnen Ziffer stets erkannt wird, während eine Vertauschung von zwei benachbarten Ziffern genau dann nicht erkannt wird, wenn die beiden Ziffern gleich sind oder sich um 5 unterscheiden.

70) Beweisen Sie: Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 teilbar ist. Mit der Ziffernsumme einer Zahl ist die Summe der Ziffern ihrer Dezimaldarstellung gemeint.

71) Gegeben sei eine natürliche Zahl x in Dezimaldarstellung:

$$x = a_n a_{n-1} \ldots a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_0 \cdot 10^0$$

Beweisen Sie: Die Zahl x ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Ziffernsumme $a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n$ durch 11 teilbar ist.

72) Gegeben sei eine natürliche Zahl n in Dezimaldarstellung. Subtrahieren Sie von der aus allen Stellen mit Ausnahme der letzten Stelle gebildeten Zahl das Zweifache der letzten Stelle. Die so erhaltene Zahl bezeichnen wir mit m. Beispiel: Die letzte Stelle von $n = 483$ ist 3, die anderen Stellen bilden 48. Daher ist $m = 48 - 2 \cdot 3 = 42$.
Beweisen Sie: n ist genau dann durch 7 teilbar, wenn m ebenfalls durch 7 teilbar ist. Im obigen Beispiel ist daher 483 durch 7 teilbar, da $42 = 6 \cdot 7$ durch 7 teilbar ist.

73) Sei a die Aussage *„Es gibt eine größte natürliche Zahl."* und b die Aussage „0 *ist die größte natürliche Zahl."* Man entscheide, ob die Aussagen $a \Rightarrow b$ bzw. $b \Rightarrow a$ wahr oder falsch sind.

74–79) Entscheiden Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, ob die folgenden Äquivalenzen richtig sind. $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ bezeichnen Sub- bzw. Bijunktion.

74) $a \vee (b \vee c) \iff (a \vee b) \vee c$

75) $a \vee (a \wedge b) \iff a$

76) $a \wedge (b \vee c) \iff (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

77) $(a \wedge \neg b) \wedge \neg c \iff a \wedge \neg(b \wedge \neg c)$

78) $a \leftrightarrow b \iff (a \rightarrow b) \rightarrow \neg(b \rightarrow a)$

79) $\neg(a \leftrightarrow b) \iff a \wedge \neg b$

80) Man zeige, dass es sich bei dem logischen Ausdruck

$$[(B \vee C) \wedge (B \rightarrow \neg A) \wedge A] \rightarrow C$$

um eine Tautologie bzw. bei dem Ausdruck

$$(A \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow B) \wedge A \wedge \neg B$$

um eine Kontradiktion handelt.

81) Man zeige, dass es sich bei dem logischen Ausdruck

$$[A \wedge (A \rightarrow B)] \rightarrow B$$

um eine Tautologie handelt.

82) Man zeige, dass es sich bei dem logischen Ausdruck

$$[\neg B \wedge (A \rightarrow B)] \rightarrow \neg A$$

um eine Tautologie handelt.

83) Handelt es sich bei der aussagenlogischen Formel

$$[(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)] \leftrightarrow (A \rightarrow C)$$

um eine Tautologie, um eine Kontradiktion oder um eine erfüllbare Formel?

84) Gelten folgende Formeln? Geben Sie jeweils eine verbale Begründung.

(a) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} : \; x < y$

(b) $\exists y \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{N} : \; x < y$

(c) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} : \; y < x$

(d) $\forall x \in \mathbb{Z}\, \exists y \in \mathbb{Z} : \; y < x$

85) Man bestimme alle $m, n \in \mathbb{N}$, für welche die Prädikate $P(n)$ bzw. $P(n, m)$ in eine wahre Aussage übergehen.

(a) $P(n) : n! \leq 10n$

(b) $P(n) : (n^2 - 5n - 6 \geq 0) \Rightarrow (n \leq 10)$

(c) $P(n, m) : (m = n!) \Rightarrow (m$ ist durch 10 teilbar$)$

86) Man bestätige die Richtigkeit der folgenden Behauptungen durch einen indirekten Beweis:

(a) Ist die Summe $m + n$ zweier Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ ungerade, dann ist genau einer der beiden Summanden ungerade.

(b) Ist das Quadrat n^2 einer ganzen Zahl n gerade, dann ist auch n gerade.

87) Man beweise, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind. (D. h., gilt eine der drei Aussagen, dann gelten alle drei.)

$$\text{(i) } A \subseteq B, \qquad \text{(ii) } A \cup B = B, \qquad \text{(iii) } A \cap B = A.$$

88–96) Beweisen Sie die folgenden Beziehungen mit Hilfe von Elementtafeln oder geben Sie ein konkretes Gegenbeispiel an.

88) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

89) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

90) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

91) $(A \cup B) \cap (B \cup C)' \subseteq A \cap B'$

92) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

93) $(A \triangle B)' = A' \triangle B'$

94) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

95) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

96) $A \triangle (B \cap C) = (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$

97–100) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Identitäten für Mengen:

97) $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B)$.

98) $(A \times B) \cup (B \times A) = (A \cup B) \times (A \cup B)$.

99) $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$.

100) $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$.

101) Sei M eine nichtleere endliche Menge. Zeigen Sie, dass M gleich viele Teilmengen mit gerader Elementanzahl wie solche mit ungerader Elementanzahl besitzt, indem Sie ein Verfahren angeben, das aus den Teilmengen der einen Art umkehrbar eindeutig die der anderen Art erzeugt.

102) Es sei A eine Menge mit n Elementen und $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A. Zeigen Sie, dass $P(A)$ 2^n Elemente besitzt.

103) Sei $A = \{1, 2, \ldots, 8\}$ und R binäre Relation auf A definiert durch

$$a\,R\,b \;\Leftrightarrow\; a = b \text{ oder } \operatorname{ggT}(a, b) = 2, \; \forall a, b \in A.$$

Man gebe explizit die Relation R sowie ihren Graphen G_R an.

104) Man untersuche nachstehend angeführte Relationen $R \subseteq M^2$ in Hinblick auf die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität:

(a) $M =$ Menge aller Einwohner von Wien (Volkszählung 2001), $a\,R\,b \;\Leftrightarrow\; a$ ist verheiratet mit b

(b) M wie oben, $a\,R\,b \;\Leftrightarrow\; a$ ist nicht älter als b

(c) M wie oben, $a\,R\,b \;\Leftrightarrow\; a$ ist so groß wie b

(d) $M = \mathbb{R}$, $a\,R\,b \;\Leftrightarrow\; a - b \in \mathbb{Z}$

(e) $M = \mathbb{R}^n$, $(x_1, \ldots, x_n)\,R\,(y_1, \ldots, y_n) \;\Leftrightarrow\; x_i \leq y_i \; \forall i = 1, \ldots, n$

105) Man zeige, dass durch

$$a\,R\,b \;\Leftrightarrow\; 3\,|\,a^2-b^2 \quad \text{für alle } a,b\in\mathbb{Z}$$

eine Äquivalenzrelation R in der Menge $\mathbb{Z}$ erklärt wird, und bestimme die zugehörende Partition.

106) Man zeige, dass durch

$$a\,R\,b \;\Leftrightarrow\; 6\,|\,a^2-b^2 \quad \text{für alle } a,b\in\mathbb{Z}$$

eine Äquivalenzrelation R in der Menge $\mathbb{Z}$ erklärt wird, und bestimme die zugehörende Partition.

107–111) Stellen Sie die folgenden Relationen im kartesischen Koordinatensystem und auch als gerichteten Graphen dar und untersuchen Sie weiters, ob eine Äquivalenzrelation vorliegt.

107) Die Relation R sei für $m,n\in\{2,3,4,5\}$ definiert durch $mRn \iff m+n$ ungerade oder $m=n$.

108) $mRn \iff m+n$ gerade, $m,n\in\{2,3,4,5\}$.

109) $mRn \iff m-n$ ungerade oder $m=n$, $m,n\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

110) $mRn \iff \mathrm{ggT}(m,n)=1$, $m,n\in\{1,2,3,\ldots\}$, wobei $\mathrm{ggT}(m,n)$ den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen m und n bezeichnet.

111) $mRn \iff \mathrm{ggT}(m,n)=2$, $m,n\in\{2,4,6,\ldots\}$, wobei $\mathrm{ggT}(m,n)$ den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen m und n bezeichnet.

112) Untersuchen Sie, ob die Relation $ARB \iff A\bigtriangleup B=\emptyset$ ($\bigtriangleup$ die symmetrische Differenz) auf der Potenzmenge einer Menge M eine Äquivalenzrelation bildet.

113) Untersuchen Sie, ob die Relation $ARB \iff A\bigtriangleup B=A$ ($\bigtriangleup$ die symmetrische Differenz) auf der Potenzmenge einer Menge M eine Äquivalenzrelation bildet.

114) Sei $f: A\to B$. Man zeige, dass durch $x\equiv y \iff f(x)=f(y)$ eine Äquivalenzrelation $\equiv$ auf der Menge A definiert wird.

115) Seien R_1 und R_2 Äquivalenzrelationen auf der Menge M. Man beweise, dass dann auch ihr Durchschnitt $R=R_1\cap R_2$ Äquivalenzrelation auf M ist. Gilt dies auch für die Vereinigung $R_1\cup R_2$?

116) Sei T_{70} die Menge aller natürlichen Zahlen, die 70 teilen. Man vergleiche die Hassediagramme der beiden Halbordnungen $\langle \mathbf{P}(\{a,b,c\}),\subseteq\rangle$ und $\langle T_{70},|\rangle$.

117) Sei T_{24} die Menge aller natürlichen Zahlen, die 24 teilen. Man vergleiche die Hassediagramme der beiden Halbordnungen $\langle \mathbf{P}(\{a,b,c\}),\subseteq\rangle$ und $\langle T_{24},|\rangle$.

118) Für eine natürliche Zahl n sei T_n die Menge aller natürlichen Zahlen, die n teilen. Man vergleiche die Hassediagramme der beiden Halbordnungen $\langle T_{70},|\rangle$ und $\langle T_{40},|\rangle$.

119) Sei $mRn \iff |m|\le|n|$, $m,n\in\mathbb{Z}$. Ist R eine Halbordnung auf $\mathbb{Z}$?

120) Untersuchen Sie, ob die Relation $ARB \iff A\subseteq B$ auf der Potenzmenge einer Menge M eine Halbordnung bildet und zeichnen Sie gegebenenfalls das Hassediagramm für $|M|=3$.

121) Für $k,n\in\{1,3,4,\ldots,10\}$ sei kRn, falls k ein Teiler von n ist und k und $\frac{n}{k}$ teilerfremd sind. Man untersuche, ob die Relation R eine Halbordnung ist und ermittle gegebenenfalls das Hassediagramm.

122) Wie Bsp. 121) für $k,n\in\{2,3,4\ldots,10\}$.

123) Seien R_1 und R_2 Halbordnungen auf der Menge M. Man beweise, dass dann auch ihr Durchschnitt $R=R_1\cap R_2$ Halbordnung auf M ist.

124–126) Welche der Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität haben folgende Relationen R auf $\mathbb{Z}$:

124) $mRn \iff m^2=n^2$? **125)** $mRn \iff m^4=n^4$? **126)** $mRn \iff m=n^2$?

127) Man zeige: $(\mathbb{C},\preceq)$ ist Halbordnung mit $z=a+bi\preceq w=c+di$, falls $a<c$ oder $(a=c$ und $b\le d)$. Weiters gebe man drei verschiedene komplexe Zahlen $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ an, für die $z_1\preceq z_2$ und $z_3\succeq 0$, aber $z_3z_1\succeq z_3z_2$ gelten.

128) Man zeige: $(\mathbb{C},\preceq)$ ist Halbordnung mit $z=a+bi\succeq w=c+di$, falls $a>c$ oder $(a=c$ und $b\ge d)$. Weiters gebe man drei verschiedene komplexe Zahlen $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ an, für die $z_1\succeq z_2$ und $z_3\preceq 0$, aber $z_3z_1\succeq z_3z_2$ gelten.

129–133) Untersuchen Sie, ob es sich bei den folgenden Relationen $R\subseteq A\times B$ um Funktionen, injektive Funktionen, surjektive Funktionen bzw. bijektive Funktionen handelt. ($\mathbb{R}^+$ bezeichnet die Menge aller positiven reellen Zahlen.)

129) $R=\{(\sqrt{x},\frac{1}{x})|\ x\in\mathbb{R}^+\}, A=B=\mathbb{R}^+$. **130)** $R=\{(x^2,\frac{1}{x^2})|\ x\in\mathbb{R}^+\}, A=B=\mathbb{R}$.

131) Wie 130) jedoch $A=B=\mathbb{R}^+$. **132)** $R=\{(\log_2 x,x)|x\in\mathbb{R}^+\}, A=B=\mathbb{R}$.

133) $R=\{(\log_3 x,x^2)|x\in\mathbb{R}^+\}, A=\mathbb{R}, B=\mathbb{R}^+$.

134) Sei $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Welche der Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität hat die folgende Relation auf $\mathbb{Z}$?

$$mRn \iff f(m)=f(n)\ ?$$

Unter welcher Voraussetzung an die Funktion f ist die Relation R auch antisymmetrisch? Ist R eine Äquivalenzrelation? Falls ja, bestimmen Sie auch die durch R induzierte Partition auf $\mathbb{Z}$ für die Funktionen

(a) $f(x)=3x$,

(b) $f(x)=x \mod 3$,

(c) $f(x)=x^2$.

135) Auf den Mengen $A=\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ seien die binären Relationen $f_A:=\{(x,2x)\,|\,x\in A\}$ und $g_A:=\{(2x,x)\,|\,x\in A\}$ gegeben.

(a) Für welche A gilt $g_A:A\to A$, d.h. wann handelt es sich bei g_A um eine Funktion?

(b) Für welche A ist f_A eine Funktion, wann sogar injektiv, surjektiv, bijektiv?

(c) Sind $f\subseteq A\times B$ und $g\subseteq B\times C$ Relationen, so ist (analog zur Komposition von Abbildungen) das Relationenprodukt $g\circ f\subseteq A\times C$ definiert als Relation $\{(a,c)\,|\,\exists b\in B:\ (a,b)\in f,(b,c)\in g\}$. Beschreiben Sie $g_A\circ f_A$.

(d) Sei $f\subseteq A\times A$ eine Relation auf A. Begründen Sie mittels Induktion, dass die rekursive Definition der Iterationen f^n, $n\in\mathbb{N}$, durch $f^0:=\{(x,x)|\,x\in A\}$ und $f^{n+1}:=f\circ f^n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ Funktionen $f^n:A\to A$ definiert, sofern $f:A\to A$ (f also selbst eine Funktion ist).

136) Seien $f: A\to B$ und $g: B\to C$ injektive Abbildungen. Man zeige, dass dann auch $h=g\circ f: A\to C$ injektiv ist. $((g\circ f)(x)=g(f(x)).)$

137) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ surjektive Abbildungen. Man zeige, dass dann auch $h = g \circ f : A \to C$ surjektiv ist. ($(g \circ f)(x) = g(f(x))$.)

138) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie, dass aus der Surjektivität von $g \circ f$ die Surjektivität von g und aus der Injektivität von $g \circ f$ die Injektivität von f folgt.

139) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Abbildungen, sodass $g \circ f$ surjektiv und g injektiv ist. Man zeige, dass dann auch f surjektiv ist.

140) Zu den nachstehenden Abbildungen f bzw. g auf der Menge $\{0, 1, \dots, 9\}$ bestimme man jeweils den zugehörenden Graphen und untersuche die angegebene Zuordnung auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

$$\text{(a) } f(x) = x^2 \mod 10, \qquad \text{(b) } g(x) = x^3 \mod 10.$$

141) Man zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{7\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $y = \dfrac{2x+1}{x-7}$, bijektiv ist, und bestimme ihre Umkehrfunktion.

142) Man zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{6\} \to \mathbb{R} \setminus \{-10\}$, $y = \dfrac{10x+1}{6-x}$, bijektiv ist, und bestimme ihre Umkehrfunktion.

143) Man zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = x \cdot |x|$, bijektiv ist, und bestimme ihre Umkehrfunktion.

144) Es sei A eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A. Zeigen Sie, dass es keine surjektive Abbildung $f : A \to \mathcal{P}(A)$ gibt.
Hinweis: Betrachten Sie für jede Abbildung $f : A \to \mathcal{P}(A)$ die Menge $\{a \in A \mid a \notin f(a)\} \in \mathcal{P}(A)$.

145) Zeigen Sie, daß $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist.

146) Zeigen Sie, dass in einem Hotel mit abzählbar unendlich vielen Zimmern immer noch Platz für einen weiteren Gast ist, selbst wenn alle Zimmer belegt sind. (Hinweis: Siedeln Sie Gäste um.)

147) Zeigen Sie, dass in dem Hotel aus Aufgabe 146 sogar immer noch abzählbar viele Gäste Platz haben.

148) $\mathcal{A}$ sei ein beliebiges endliches Alphabet (z. B. $\mathcal{A} = \{a, b, c, \dots, z\}$). Zeigen Sie, dass die Menge aller (endlichen) „Wörter“ über dem Alphabet $\mathcal{A}$ abzählbar ist.

149) $\mathcal{A}$ sei ein beliebiges Alphabet mit mindestens zwei Buchstaben (z. B. $\mathcal{A} = \{a, b, c, \dots, z\}$). Zeigen Sie, dass die Menge aller unendlichen „Wörter“ über dem Alphabet $\mathcal{A}$ überabzählbar ist.

150) Sei A eine abzählbar unendliche Menge und $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(A)$ überabzählbar ist. Hinweis: Fassen Sie $\mathcal{P}(A)$ als Menge von unendlichen 0-1-Folgen auf.

151) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ überabzählbar ist.

152) Man beweise die Beziehung $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ durch Interpretation von $\binom{n}{k}$ als Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

153) Man beweise die Beziehung $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ mit Hilfe der Formel $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

154) Von m weißen Kugeln, die mit den Zahlen $1, \dots, m$ nummeriert sind, sollen $k \geq 1$ Kugeln schwarz eingefärbt werden. Wieviele derartige Färbungen gibt es unter der Einschränkung, dass die Kugel mit der Nummer n schwarz ist, und alle Kugeln mit einer höheren Nummer weiß bleiben? Erklären Sie, warum aus dem Ergebnis die folgende Gleichung folgt:

$$\sum_{n=1}^{m} \binom{n-1}{k-1} = \binom{m}{k}.$$

155) Wieviele „Wörter“ der Länge 28 gibt es, bei denen genau 5-mal der Buchstabe `a`, 14-mal `b`, 5-mal `c`, 3-mal `d` vorkommen und genau einmal `e` vorkommt?

156) Wieviele Möglichkeiten gibt es, 23 verschieden große Kugeln so zu färben, dass 9 rot, 5 schwarz, 4 blau, 4 grün sind und eine weiß ist?

157) Wieviele „Wörter“ der Länge 28 aus den Buchstaben `a`, `b` gibt es, die genau 5-mal `a` enthalten und zwischen je zwei `a` mindestens 3-mal den Buchstaben `b`?

158) Wieviele verschiedene „Wörter“ kann man durch Permutation der Buchstaben aus dem Wort $MISSISSIPPI$ bilden?

159) Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus einem 32-bändigen Lexikon genau 7 Bücher auszuwählen, wobei zwischen zwei ausgewählten Bänden immer mindestens einer im Regal stehen bleiben soll?

160) Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus einem 50-bändigen Lexikon genau 6 Bücher auszuwählen, wobei zwischen zwei ausgewählten Bänden immer mindestens drei im Regal stehen bleiben sollen?

161) Jemand wirft $2n$-mal eine Münze. Wieviele verschiedene Spielverläufe gibt es, wenn gleich oft Kopf wie Adler auftreten soll?

162) Zeigen Sie durch Angabe einer Bijektion auf 0-1-Folgen: Es gibt 2^{n-1} Permutationen π von $\{1, 2, \dots, n\}$ mit $\pi(k) \leq k + 1$ für alle $1 \leq k \leq n - 1$.

163) Wieviele Möglichkeiten gibt es, drei (voneinander unterscheidbare) Würfel so zu werfen, dass genau zwei die selbe Augenzahl zeigen?

164) Man bestimme die Anzahl der möglichen Tototipps (`1`, `2`, `x`) bei 12 Spielen und die Anzahl der möglichen richtigen Zehner. (D. h. die Anzahl derjenigen Tipps, die mit einer vorgegebenen Kolonne an genau 10 der 12 Stellen übereinstimmen.)

165) Man bestimme die Anzahl der möglichen „6 aus 45“-Lottotipps und die Anzahl der möglichen richtigen Vierer (d. h., die Anzahl derjenigen 6-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \dots, 45\}$, die mit einer vorgegebenen 6-elementigen Teilmenge genau 4 Elemente gemeinsam haben).

166) Man bestimme für das „6 aus 45“-Lotto die Anzahl der möglichen richtigen Fünfer (d. h., die Anzahl derjenigen 6-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \dots, 45\}$, die mit einer vorgegebenen 6-elementigen Teilmenge genau 5 Elemente gemeinsam haben).

167) Man bestimme für das „6 aus 45“-Lotto die Anzahl der möglichen richtigen Fünfer mit Zusatzzahl (d. h., die Anzahl derjenigen 6-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \dots, 45\}$, die mit einer vorgegebenen 6-elementigen Teilmenge genau 5 Elemente gemeinsam haben und deren sechstes Element einen vorgegebenen Wert außerhalb der 6-elementigen Menge hat).

168) Wie viele verschiedene Tipps müssen beim Lotto „6 aus 45“ abgegeben werden, um sicher einen Sechser zu erzielen? Wie viele verschiedene Tipps führen zu keinem Gewinn (d.h., diese Tipps enthalten maximal zwei richtige Zahlen), bei wie vielen möglichen Tipps stimmt mindestens eine Zahl, bei wie vielen sind alle Zahlen falsch?

169) Sei M eine nichtleere endliche Menge. Zeigen Sie: M besitzt gleich viele Teilmengen mit gerader Elementanzahl wie solche mit ungerader Elementanzahl.

170) Wieviele natürliche Zahlen $n < 100\,000$ enthalten in ihrer Dezimalentwicklung genau dreimal die Ziffer drei?

171) Wieviele natürliche Zahlen $n < 1000\,000$ enthalten in ihrer Dezimalentwicklung genau viermal die Ziffer zwei?

172) Man beweise nachstehende Identitäten für Binomialkoeffizienten:

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

173) Man beweise die Formel

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

(Hinweis: Man betrachte die Koeffizienten von $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$.)

174) Zeigen Sie die folgende Formel von *Vandermonde*

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$$

für $x, y, n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Identität $(1+z)^x(1+z)^y = (1+z)^{x+y}$.

175) Zeigen Sie die Formel von Vandermonde aus Bsp. 174 mit Hilfe kombinatorischer Deutung.

176) Man zeige

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{x}{k} = (-1)^n \binom{x-1}{n}$$

für alle $x \geq 1$ und $x \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Identität $(1-z)^x \cdot \frac{1}{1-z} = (1-z)^{x-1}$.

177–180) Berechnen Sie unter Benützung des Binomischen Lehrsatzes (und ohne Benützung der Differentialrechnung):

177)
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k4^k$$

178)
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k5^k$$

179)
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k}$$

180)
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k)2^k$$

181) Eine Datei enthalte 7 Datensätze vom Typ A, 4 vom Typ B, 6 vom Typ C, 2 vom Typ D und 3 vom Typ E. Sie soll so in eine doppelt verkettete Liste sortiert werden, dass die Randelemente (erster und letzter Satz) nur Sätze der Typen A oder E sein dürfen. Weiters sollen zwischen zwei Datensätzen des selben Typs keine Sätze anderen Typs stehen. Wie viele mögliche Anordnungen gibt es?

182) Wie viele verschiedene Variablennamen kann man in einer fiktiven Programmiersprache verwenden, wenn diese Namen aus mindestens einem, höchstens aber vier (nicht notwendig verschiedenen) Buchstaben $\{\text{A}, \ldots, \text{Z}\}$ bestehen müssen und die Befehle AND, OR, IF, THEN und GOTO nicht als Teilwörter enthalten sei dürfen.

183) Wieviele Möglichkeiten gibt es, k ununterscheidbare Kugeln auf n unterscheidbare Kästchen zu verteilen, wenn jedes Kästchen beliebig viele Kugeln (einschließlich 0) aufnehmen kann?

184) Ein Turm soll auf einem Schachbrett von der linken unteren Ecke in die rechte obere Ecke ziehen. Wieviele verschiedene Wege gibt es, wenn der Turm nie nach links oder unten ziehen darf, d. h. in jedem Schritt nur ein oder mehrere Felder nach rechts oder nach oben.

185) Zeigen Sie mithilfe des Schubfachprinzips: Unter je neun Punkten in einem Würfel der Kantenlänge 2 gibt es stets zwei Punkte, deren Abstand höchstens $\sqrt{3}$ ist.

186) Zeigen Sie mithilfe des Schubfachprinzips: Unter je 15 natürlichen Zahlen gibt es mindestens zwei, deren Differenz durch 14 teilbar ist.

187) Bei einem Turnier muss jeder Spieler genau einmal gegen jeden der anderen Spieler antreten. Zeigen Sie: Zu jedem Zeitpunkt des Turniers gibt es mindestens zwei Spieler, die die selbe Anzahl von Spielen bestritten haben.

188–201) Die folgenden Aufgaben sollen mit dem Inklusions-Exklusionsprinzip bearbeitet werden!

188) In einer Menge von n Personen können 10 Personen Deutsch, 7 Englisch, 5 Französisch, 6 Deutsch und Englisch, 4 Deutsch und Französisch, 3 Englisch und Französisch, 3 alle drei Sprachen und niemand keine der drei Sprachen. Wie groß ist n?

189) In einer Menge von n Personen können 13 Personen Deutsch, 8 Englisch, 7 Französisch, 5 Deutsch und Englisch, 6 Deutsch und Französisch, 3 Englisch und Französisch, 2 alle drei Sprachen und niemand keine der drei Sprachen. Wie groß ist n?

190) In einer Menge von n Personen können 10 Personen Deutsch, 9 Englisch, 9 Französisch, 5 Deutsch und Englisch, 7 Deutsch und Französisch, 4 Englisch und Französisch, 3 alle drei Sprachen und niemand keine der drei Sprachen. Wie groß ist n?

191) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^6$ gibt es, die weder Quadrat, noch dritte, vierte oder fünfte Potenz einer natürlichen Zahl sind?

192) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^8$ gibt es, die weder dritte, noch vierte, fünfte oder sechste Potenz einer natürlichen Zahl sind?

193) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^3$ gibt es, die durch 3 und 5, aber weder durch 9 noch durch 11 teilbar sind?

194) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^4$ gibt es, die durch 9 und 11, aber weder durch 5 noch durch 7 teilbar sind?

195) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^4$ gibt es, die durch 3, 5 und 7, aber weder durch 9 noch durch 11 teilbar sind?

196) Wie viele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 1000$ gibt es, die durch 3, 5 oder 13 teilbar sind? Wie viele sind weder durch 3, noch durch 5, noch durch 13 teilbar?

197) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^6$ gibt es, die weder durch 2 teilbar, noch Quadratzahlen, noch dritte, noch 4. Potenzen natürlicher Zahlen sind?

198) Man bestimme die Anzahl aller Anordnungen (Permutationen) der Buchstaben `a`, `b`, `c`, `d`, `e`, `f`, `g`, in denen weder der Block „`abcd`“ noch der Block „`fa`“ vorkommt.

199) Man bestimme die Anzahl aller Anordnungen (Permutationen) der Buchstaben `a`, `b`, `c`, `d`, `e`, `f`, in denen weder der Block „`bcf`“ noch der Block „`eb`“ vorkommt.

200) Man bestimme die Anzahl aller Anordnungen (Permutationen) der Buchstaben `a`, `b`, `c`, `d`, `e`, `f`, `g`, `h`, in denen weder der Block „`acg`“ noch der Block „`cgbe`“ vorkommt.

201) Auf wieviele Arten können 8 Türme auf ein Schachbrett gestellt werden, derart dass sie einander nicht schlagen und die weiße Diagonale freibleibt? (Ein Turm schlägt eine andere Figur, die horizontal oder vertikal auf gleicher Höhe steht, sofern keine andere Figur dazwischen steht.)

202) Stellen Sie sich ein rechteckiges Schachbrettmuster vor, bestehend aus m mal n Quadraten mit Seitenlänge 1. Wege seien nur entlang der Ränder dieser Quadrate erlaubt. Die kürzesten Wege vom linken unteren zum rechten oberen Eckpunkt des Rechtecks haben offenbar alle die Länge $m+n$. Die Menge all dieser kürzesten Wege sei mit $K(m,n)$ bezeichnet.

(a) Wieviele kürzeste Wege gibt es für $m=6$ und $n=4$?

(b) Jeder kürzeste Weg w lässt sich darstellen als eine Abfolge von Schritten w_i nach oben (o) oder nach rechts (r), symbolisch also $w=(w_1,\dots,w_{m+n})$, z.B. $w=(r,o,r,r,o,o,o,r,r,r)$ (hier ist wieder $m=6, n=4$). Welche Bijektion f zwischen $K(m,n)$ und der Menge $T(m,n)$ aller m-elementigen Teilmengen von $\{1,2,\dots,m+n\}$ wird durch diese Darstellung nahegelegt?

(c) Geben Sie eine allgemeine Formel für $|K(m,n)|$ an.

203) C_n bezeichne die n-te Catalan-Zahl. Zeigen Sie: Es gibt genau C_{n-2} Möglichkeiten, ein konvexes n-Eck durch Diagonalen in lauter Dreiecke zu zerlegen, wenn keine zwei Diagonalen einander überschneiden dürfen.

Hinweis: Man zeige, dass die gesuchte Zahlenfolge und die Folge der Catalanzahlen die selbe Rekursion erfüllen.

204) C_n bezeichne die n-te Catalan-Zahl. Zeigen Sie: Es gibt genau C_{n-1} mögliche Wege, auf denen ein König auf einem Schachbrett der Größe $n\times n$ von der linken unteren zur rechten oberen Ecke ziehen kann, wenn er immer nur nach rechts oder oben ziehen und kein Feld oberhalb der Hauptdiagonale berühren darf.

Hinweis: Man zeige, dass die gesuchte Zahlenfolge und die Folge der Catalanzahlen die selbe Rekursion erfüllen.

205) Sei C_n die n-te Catalan-Zahl gegeben durch $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Man zeige für $n\ge 1$ die gleichwertigen Darstellungen

$$\text{(a) } C_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}, \qquad \text{(b) } C_n=\frac{2\cdot 6\cdot\ldots\cdot(4n-2)}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)}.$$

206) Man zeige, dass die Folge der Catalan-Zahlen C_n, $n\ge 0$, gegeben ist durch die Rekursion

$$C_0=1,\quad C_{n+1}=\frac{4n+2}{n+2}\cdot C_n\ (n\ge 0).$$

Hinweis: Man zeige zunächst die Darstellung (b) aus der vorigen Aufgabe für C_n.

207) Wie viele Möglichkeiten gibt es, $2n$ Punkte auf einer Geraden so oberhalb der Geraden paarweise zu verbinden, dass sich die Verbindungslinien nicht kreuzen?

208) An einem runden Tisch sitzen $2n$ Personen. Auf wie viele Arten können sich die Personen paarweise die Hände reichen, ohne dass eine Überkreuzung stattfindet?

209) Man finde alle Lösungen der Differenzengleichung

$$\begin{aligned}&(a)\quad 2x_{n+1}-3x_n+1=0\quad(n\ge 0),\\&(b)\quad x_{n+1}-x_n+7=0\quad(n\ge 0).\end{aligned}$$

210) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$x_{n+1}=\frac{2}{3}x_n+1\quad(\text{für } n\ge 0)$$

und die partikuläre Lösung, die der Anfangsbedingung $x_0=6$ genügt.

211) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$x_{n+1}=\frac{x_n}{1+x_n},\quad n=0,1,2,\dots$$

mit $x_0\ne -1,-1/2,-1/3,\dots$.
(Hinweis: Man benütze die Transformation $x_n=1/y_n$.)

212) Gesucht ist die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$x_{n+1}=3^{2n}x_n+3^{n^2},\quad n=0,1,2,\dots$$

213) Bestimmen Sie die Lösung der Differenzengleichung

$$x_{n+1}=(n+1)x_n+(n+1)!,\quad x_0=1.$$

214) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzengleichung $a_n=\frac{n}{n+2}a_{n-1}+\frac{1}{n^2+3n+2}$.

215) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzengleichung $a_n=\frac{n+2}{3n}a_{n-1}+n^2+3n+2$.

216) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzengleichung $a_n=\sqrt{n(n+1)}a_{n-1}+n!(n+1)^{3/2}$.

217) Beim Sortieren von n Zahlen durch "Direktes Einfügen" gilt für die Anzahl v_n der Vergleiche (im ungünstigsten Fall)

$$v_1=0\quad\text{und}\quad v_n=v_{n-1}+n-1,\quad n=2,3,\dots$$

und für die Zahl w_n der Wertzuweisungen

$$w_1=0\quad\text{und}\quad w_n=w_{n-1}+n+1,\quad n=2,3,\dots.$$

Warum? Man bestimme explizite Formeln für v_n und w_n.

218) Gesucht sind die allgemeinen Lösungen der linearen homogenen Differenzengleichungen

$$\begin{aligned}&(a)\quad x_{n+2}-5x_{n+1}-6x_n=0,\\&(b)\quad x_{n+2}-6x_{n+1}+12x_n=0,\\&(c)\quad x_{n+2}-5x_{n+1}+6.25x_n=0.\end{aligned}$$

219) Gesucht sind die allgemeinen Lösungen der linearen homogenen Differenzengleichungen

$$\begin{aligned}&(a)\quad x_{n+2}-7x_{n+1}+12x_n=0,\\&(b)\quad x_{n+2}+x_{n+1}+x_n=0,\\&(c)\quad x_{n+2}-8x_{n+1}+16x_n=0.\end{aligned}$$

220) Gesucht sind die allgemeinen Lösungen der linearen homogenen Differenzengleichungen

$$\begin{aligned} &(a) \quad x_{n+2} + 12x_{n+1} + 36x_n = 0, \\ &(b) \quad x_{n+2} - 2x_{n+1} + 5x_n = 0, \\ &(c) \quad x_{n+2} + 11x_{n+1} + 28x_n = 0. \end{aligned}$$

221) Gesucht sind die allgemeinen Lösungen der linearen homogenen Differenzengleichungen

$$\begin{aligned} &(a) \quad x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n = 0, \\ &(b) \quad x_{n+2} - 6x_{n+1} + 25x_n = 0, \\ &(c) \quad x_{n+2} + 11x_{n+1} + 30.25x_n = 0. \end{aligned}$$

222) Man bestimme die Lösung nachstehender Differenzengleichung zu den vorgegebenen Anfangsbedingungen:

$$4x_{n+2} + 12x_{n+1} - 7x_n = 36, \quad x_0 = 6, \ \ x_1 = 3.$$

223) Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 8 + 3^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

224–229) Berechnen Sie die folgenden Summen durch Aufstellen und Lösen einer Rekursion mittels Ansatzmethode.

224) $\sum_{i=1}^{n} i$

225) $\sum_{i=1}^{n} i^2$

226) $\sum_{i=1}^{n} q^i$

227) $\sum_{i=1}^{n} iq^i$

228) $\sum_{i=1}^{n} i(i-1)$

229) $\sum_{i=1}^{n} i^2 q^i$

230–246) Lösen Sie die Rekursion mit der Ansatzmethode:

230) $a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-1}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 1$.

231) $a_n = 2a_{n-1} + 2^{2n-2}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 5$.

232) $a_n = 3a_{n-1} + 3^{n-1}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 2$.

233) $a_n = 5a_{n-1} + 2^{n-1} - 6n5^n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 2$.

234) $a_n = 2a_{n-1} + (1 + 2^n)^2$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 2$.

235) $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 1 + \sin(n\pi/3)$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = -1$.

236) $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = \sin(2n\pi/3)$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 0$, $a_1 = -1$.

237) $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = 1 + \cos(n\pi/4)$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 1$, $a_1 = -2$.

238) $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = \cos(n\pi/3)$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

239) $a_n - a_{n-2} = \sin(n\pi/2)$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 7$, $a_1 = -12$.

240) $a_n + a_{n-2} = \cos(n\pi/2)$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 7$, $a_1 = -1$.

241) $2a_n - 7a_{n-1} + 6a_{n-2} = (n^2 + 3n - 4)3^n$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 10$, $a_1 = -7$.

242) $2a_n - 7a_{n-1} + 6a_{n-2} = (n-1)2^{n+2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

243) $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} = 1$ $(n \geq 3)$, $a_0 = 3$, $a_1 = a_2 = -1$.

244) $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = n^2 2^n$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$.

245) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2^{2n-4} - n^2$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 1, a_1 = 2$.

246) $a_n + 3a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3} = 2^n - 3 \cdot (-1)^n$ $(n \geq 3)$, $a_0 = a_1 = a_2 = 1$.

247–255) Stellen Sie eine Rekursion für die gesuchten Zahlen a_n auf und lösen Sie diese:

247) Es sei a_n die Anzahl aller Teilmengen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$, die keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten.

248) Es sei a_n wie in Bsp. 247), jedoch gilt jetzt auch 1 als Nachfolger von n (zyklische Anordnung).

249) Es sei a_n die Anzahl aller Folgen der Länge n aus `0` und `1`, die keine zwei aufeinanderfolgenden Einser enthalten.

250) a_n sei die größte Anzahl von Teilen, in die eine Kugel durch n Großkreise zerlegt werden kann. (Ein Großkreis ist ein Kreis auf der Kugel, dessen Mittelpunkt gleich dem Kugelmittelpunkt ist.)

251) a_n sei die Anzahl aller n-stelligen Zahlen, in denen je zwei aufeinander folgende Ziffern verschieden sind.

252) Sei a_n die Anzahl der Wörter der Länge n, gebildet aus den Buchstaben a, b und c, in denen die Anzahl der a gerade ist.

253) Eine Münze werde so oft geworfen, bis man zweimal hintereinander das Ergebnis „Kopf“ erhält. Auf diese Art erhält man eine Folge, deren Glieder entweder „Kopf“ oder „Zahl“ sind. a_n bezeichne die Anzahl der möglichen Folgen der Länge n.

254) a_n sei die Anzahl aller 0-1-Folgen der Länge n, in denen es keine benachbarten Nullen gibt.

255) a_n sei die Anzahl aller n-stelligen Zahlen, in denen je 3 aufeinander folgende Ziffern keinen Block der Form 000, 111, 222, ..., 999 bilden.

256) Lösen Sie das System von Rekursionen $a_{n+1} = 2a_n + 4b_n$, $b_{n+1} = 3a_n + 3b_n$ $(n \geq 0)$ mit den Startwerten $a_0 = 1$, $b_0 = -1$, indem Sie das System in eine äquivalente Rekursion zweiter Ordnung umformen.

257) Lösen Sie das System von Rekursionen $a_{n+1} = 3a_n + 5b_n$, $b_{n+1} = 4a_n + 4b_n$ $(n \geq 0)$ mit den Startwerten $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, indem Sie das System in eine äquivalente Rekursion zweiter Ordnung umformen.

258) Lösen Sie das System von Rekursionen $a_{n+1} = 2a_n + 5b_n$, $b_{n+1} = 4a_n - b_n$ $(n \geq 0)$ mit den Startwerten $a_0 = 2$, $b_0 = 3$, indem Sie das System in eine äquivalente Rekursion zweiter Ordnung umformen.

259) Lösen Sie das System von Rekursionen $a_{n+1} = 2a_n - 3b_n$, $b_{n+1} = 4a_n - b_n$ $(n \geq 0)$ mit den Startwerten $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, indem Sie das System in eine äquivalente Rekursion zweiter Ordnung umformen.

260) Lösen Sie die Rekursion $a_{n+1} = a_n^2 / a_{n-1}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 1, a_1 = 2$.

261) Lösen Sie die Rekursion $a_{n+1} = a_n a_{n-1}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 1, a_1 = 2$.

262) Lösen Sie die Rekursion $a_{n+1} = 2a_n a_{n-1}/a_{n-2}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = 3$.

263) Lösen Sie die Rekursion aus Bsp. 232) mit Hilfe von erzeugenden Funktionen.

264) Lösen Sie die Rekursion aus Bsp. 233) mit Hilfe von erzeugenden Funktionen.

265) Lösen Sie die Rekursion aus Bsp. 234) mit Hilfe von erzeugenden Funktionen.

266) Man verwende die Methode der erzeugenden Funktionen zur Bestimmung der allgemeinen Lösung der Differenzengleichung erster Ordnung $x_{n+1} - x_n + 5 = 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$.

267) Man finde die Lösung der Differenzengleichung zweiter Ordnung $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 4x_n$ zu den Anfangsbedingungen $x_0 = 2$ und $x_1 = 5$ mit Hilfe der Methode der erzeugenden Funktionen.

268) Man löse das System von Rekursionen $a_{n+1} = 2a_n + 4b_n$, $b_{n+1} = 3a_n + 3b_n$ $(n \geq 0)$ mit den Startwerten $a_0 = b_0 = 1$ unter Benützung erzeugender Funktionen.

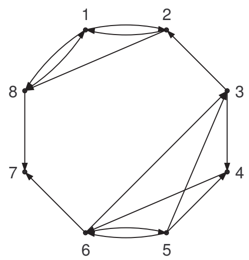
269) Man löse das System von Rekursionen $a_{n+1} = 3a_n + 5b_n$, $b_{n+1} = 4a_n + 4b_n$ $(n \geq 0)$ mit den Startwerten $a_0 = b_0 = 2$ unter Benützung erzeugender Funktionen.

270)

(a) Im nachstehenden Graphen gebe man je ein Beispiel für eine Kantenfolge, die kein Kantenzug ist, einen Kantenzug, der keine Bahn ist, bzw. eine Bahn, jeweils vom Knoten 6 zum Knoten 1 an.

(b) Desgleichen finde man eine geschlossene Kantenfolge, die kein geschlossener Kantenzug ist, einen geschlossenen Kantenzug, der kein Zyklus ist, bzw. einen Zyklus, jeweils durch den Knoten 5.

(c) Man zeige, dass G schwach, aber nicht stark zusammenhängend ist, und bestimme die starken Zusammenhangskomponenten.



271–273) Man bestimme $G_1 \cap G_2$ und $G_1 \cup G_2$:

271) G_1: $V(G_1) = \{1, 2, \ldots, 8\}$, $E(G_1) = \{\langle x, y\rangle \mid x \text{ teilt } y,\ x < y\}$,
G_2: $V(G_2) = \{1, 2, \ldots, 5\}$, $E(G_2) = \{\langle x, y\rangle \mid x < y \leq x + 3\}$.

272) G_1: $V(G_1) = \{1, 2, \ldots, 7\}$, $E(G_1) = \{\langle x, y\rangle \mid x < y \leq x + 2\}$,
G_2: $V(G_2) = \{1, 2, \ldots, 9\}$, $E(G_2) = \{\langle x, y\rangle \mid x \text{ teilt } y,\ x < y\}$.

273) G_1: $V(G_1) = \{1, 2, \ldots, 9\}$, $E(G_1) = \{\langle x, y\rangle \mid x \text{ teilt } y,\ x < y \text{ oder } x = y + 1\}$,
G_2: $V(G_2) = \{1, 2, \ldots, 9\}$, $E(G_2) = \{\langle x, y\rangle \mid xy < 25,\ x < y\}$.

274–284) Die Abbildungen aller Graphen G_i, auf die in den folgenden Aufgaben Bezug genommen wird, finden Sie auf Seite 20.

274) Man bestimme alle Quadrupel (a, b, c, d), $a, b, c, d \in \{1, 2, \ldots, 7\}$, sodass der von den Knoten a, b, c, d in G_1 aufgespannte Teilgraph mit G_2 identisch ist.

275) Man bestimme alle Quadrupel (a, b, c, d), $a, b, c, d \in \{1, 2, \ldots, 7\}$, sodass der von den Knoten a, b, c, d in G_3 aufgespannte Teilgraph mit G_4 identisch ist.

276) Man bestimme die kleinste transitive Relation R, die G_1 (als Relation aufgefasst) umfasst.

277) Man bestimme die kleinste transitive Relation R, die G_3 (als Relation aufgefasst) umfasst.

278) Konstruieren Sie, wenn möglich einen ungerichteten Graphen mit den Graden

(a) 2, 2, 3, 3, 4, 4

(b) 2, 3, 3, 4, 4, 4

(c) 2, 3, 3, 3, 4, 4

279) Ein schlichter Graph $G = (V, E)$ heißt kubisch, wenn jeder Knoten $v \in V$ Knotengrad $d(v) = 3$ hat.

(a) Geben Sie ein Beispiel für einen kubischen Graphen mit $\alpha_0(G) = 6$ an!

(b) Gibt es einen kubischen Graphen mit ungerader Knotenanzahl $\alpha_0(G)$?

(c) Zeigen Sie, daß es zu jedem $n \geq 2$ einen kubischen Graphen mit $\alpha_0(G) = 2n$ gibt!

280) Man bestimme die starken Zusammenhangskomponenten des Graphen G_1.

281) Man bestimme die starken Zusammenhangskomponenten des Graphen G_3.

282) Man bestimme die starken Zusammenhangskomponenten des Graphen G_5.

283) Man bestimme die starken Zusammenhangskomponenten des Graphen G_7.

284) Sei $\bar{G}_7$ jener Graph, der aus G_7 durch Umdrehen aller Kantenrichtungen entsteht. Man bestimme die starken Zusammenhangskomponenten und die Reduktion $\bar{G}_{7R}$ des Graphen $\bar{G}_7$.

285) Bezeichne $G = (V, E)$ einen gerichteten Graphen, V die Knoten-, $E \subseteq V^2$ die Kantenmenge. Definitionsgemäß heißen zwei gerichtete Graphen $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$, isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $f : V_1 \to V_2$ gibt mit: $(x, y) \in E_1$ (d.h. die Knoten x und y sind in G_1 durch eine Kante verbunden) genau dann, wenn $(f(x), f(y)) \in E_2$ (d.h., wenn auch $f(x)$ und $f(y)$ in G_2 durch eine Kante verbunden sind).

(a) Skizzieren Sie zwei gerichtete Graphen $G_i = (V_i, E_i)$ mit $|V_i| = 6$ $(i = 1, 2)$, die nicht isomorph sind.

(b) Begründen Sie, warum die von Ihnen gewählten Beispiele tatsächlich nicht isomorph im Sinne obiger Definition sind.

(c) Wieviele Kanten muss ein stark zusammenhängender gerichteter Graph mit sechs Knoten mindestens haben, wieviele ein zusammenhängender ungerichteter Graph mit sechs Knoten?

286) Gegeben sei der ungerichtete schlichte Graph $G = \langle V, E\rangle$ mit $V = \{a, b, c, d, e\}$ und $E = \{ab, ac, ae, bc, bd, ce\}$. Man veranschauliche G graphisch, bestimme seine Adjazenzmatrix sowie alle Knotengrade und zeige, dass die Anzahl der Knoten, die einen ungeraden Knotengrad besitzen, gerade ist. Gilt diese Aussage in jedem ungerichteten Graphen?

287) Welche der nachstehenden Adjazenzmatrizen stellt einen Baum dar?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

288–297) Die Abbildungen aller Graphen G_i, auf die in den folgenden Aufgaben Bezug genommen wird, finden Sie auf Seite 20.

288) Man bestimme die Adjazenzmatrix A_{G_1} und die Potenz $A^2_{G_1}$.

289) Man bestimme die Adjazenzmatrix A_{G_3} und die Potenz $A^2_{G_3}$.

290) Sei $\bar{G}_5$ jener Graph, der aus G_5 durch Umdrehen aller Kantenrichtungen entsteht. Man bestimme die Adjazenzmatrix $A(\bar{G}_5)$, sowie (mit deren Hilfe) die Anzahl der gerichteten Kantenfolgen der Länge 3 von 4 nach 6.

291) Man bestimme im Graphen G_5 die Anzahl der Zyklen der Länge 3, auf denen der Knoten 4 liegt.

292) Sei $\bar{G}_5$ jener Graph, der aus G_5 durch Umdrehen aller Kantenrichtungen entsteht. Man bestimme im Graphen $\bar{G}_5$ die Anzahl der Zyklen der Länge 3, auf denen der Knoten 4 liegt.

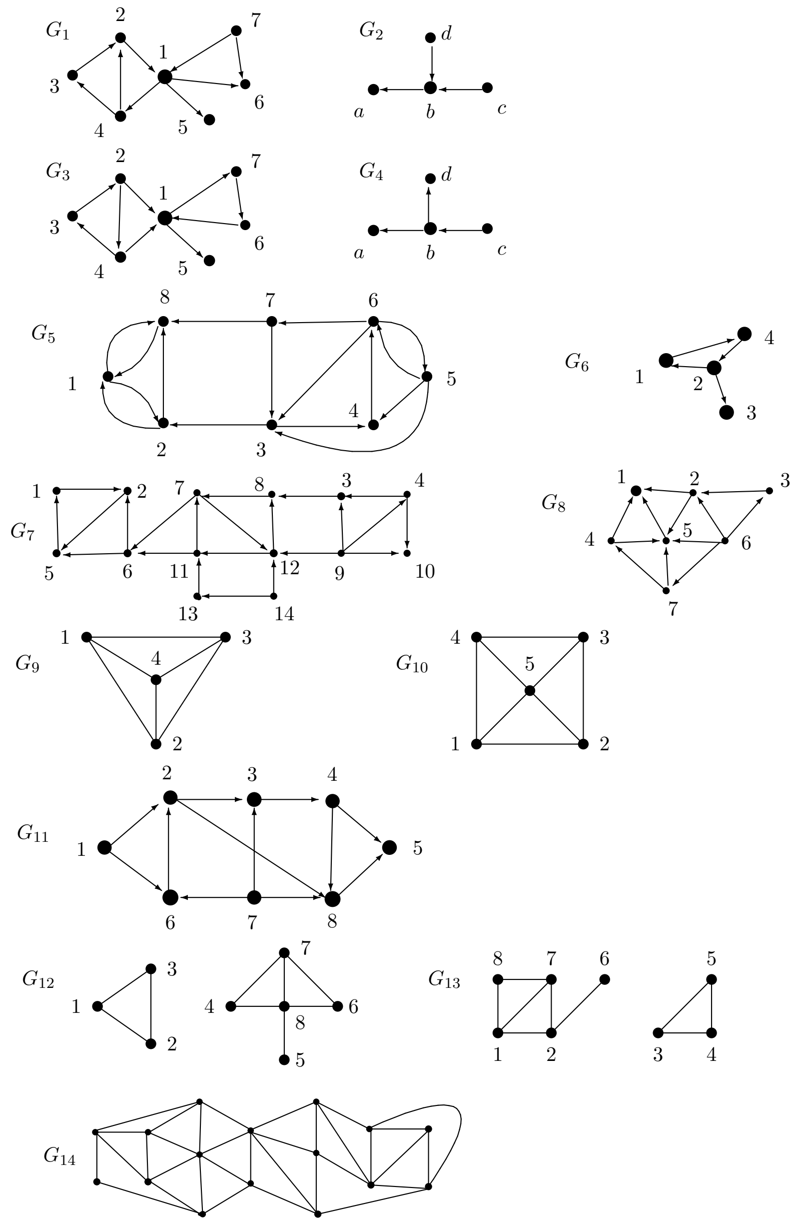
293) Man bestimme im Graphen G_9 mit Hilfe von $A^3_{G_9}$ die Anzahl der Dreiecke (d. h. die Anzahl der Kreise der Länge 3).

294) Man bestimme im Graphen G_{10} mit Hilfe von $A^3_{G_{10}}$ die Anzahl der Dreiecke (d. h. die Anzahl der Kreise der Länge 3).

295) Man bestimme im Graphen G_6 mit Hilfe der Adjazenzmatrix $A(G_6)$ die Matrix R der Erreichbarkeitsrelation.

296) Sei $\bar{G}_6$ jener Graph, der aus G_6 durch Umdrehen aller Kantenrichtungen entsteht. Man bestimme im Graphen $\bar{G}_6$ mit Hilfe der Adjazenzmatrix $A(\bar{G}_6)$ die Matrix R der Erreichbarkeitsrelation.

297) Man untersuche, ob der Graph G_{14} eine Eulersche Linie besitzt, und bestimme gegebenenfalls eine.



298) Man zeige, dass es in einem schlichten, gerichteten Graphen $G = \langle V, E \rangle$ immer zwei Knoten $x, y \in V$, $x \neq y$, gibt mit gleichem Weggrad $d^+(x) = d^+(y)$, wenn es keinen Knoten $x \in V(G)$ mit Weggrad $d^+(x) = 0$ gibt.

299) Man zeige mit Hilfe eines graphentheoretischen Modells, dass es unmöglich ist, dass bei 5 Personen, die jeweils drei anderen eine Karte senden, alle genau von jenen Karten erhalten, denen auch sie eine geschickt haben.

300) Sei G ein einfacher Graph. Man zeige, dass dann die Anzahl der Knoten ungeraden Grades gerade ist.

301) Man zeige, dass es in jedem einfachen Graphen G mit $n \geq 2$ Knoten wenigstens zwei Knoten mit gleichem Knotengrad gibt.

302) Unter n Mannschaften wird ein Turnier ausgetragen, und es haben insgesamt schon $n+1$ Spiele stattgefunden. Man zeige, daß mindestens eine Mannschaft dann bereits an mindestens 3 Spielen teilgenommen hat.

303) Man zeige, daß es in einem Graphen G mit $0 < \alpha_1(G) < \alpha_0(G)$ immer einen Knoten $v \in V(G)$ mit $d(v) \leq 1$ gibt.

304) Man zeige mit Hilfe eines geeigneten graphentheoretischen Modells, dass es in jeder Stadt mindestens zwei Bewohner mit der gleichen Anzahl von Nachbarn gibt.

305) Man bestimme alle Bäume T, für die auch T^κ ein Baum ist. T^κ bezeichne den komplementären Graphen definiert durch: $V(T^\kappa) = V(T)$ und $E(T^\kappa) = \{\{x, y\} \mid x, y \in V\} \setminus E(T)$.

306) Sei G ein schlichter Graph mit $\alpha_0(G) > 4$. Man zeige, daß dann entweder G oder G^κ (der komplementäre Graph, siehe Aufgabe 305) einen Kreis enthält.

307) Für welche m, n besitzt der vollständige bipartite Graph $K_{m,n}$ eine geschlossene Hamiltonsche Linie? (Die Knotenmenge V eines vollständigen bipartiten Graphen $K_{m,n}$ besteht aus 2 disjunkten Teilmengen V_1, V_2 mit $|V_1| = m$ und $|V_2| = n$ und die Kantenmenge E besteht aus allen ungerichteten Kanten (v_1, v_2) mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$.)

308) Zeigen Sie mithilfe der Eulerschen Polyederformel, dass der vollständige bipartite Graph $K_{3,3}$ (vgl. Aufgabe 307) nicht planar ist.

309) K_5 sei der vollständige Graph mit 5 Knoten. Zeigen Sie mithilfe der Eulerschen Polyederformel, dass K_5 nicht planar ist.

310) Ein t-ärer Baum ($t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$) ist ein ebener Wurzelbaum, bei dem jeder Knoten entweder 0 Nachfolger (Endknoten) oder genau t Nachfolger (interner Knoten) hat. Für $t = 2$ ergeben sich also genau die Binärbäume. Wieviele Endknoten hat ein t-ärer Baum mit n internen Knoten?

311) Gegeben sei ein zusammenhängender bewerteter Graph G durch seine Kanten / Bewertungen:

ab/3, ac/2, ad/7, ae/2, bd/4, bf/8, bk/6, bl/1, cf/2, ck/5, de/1,
df/6, dg/9, dh/6, dj/1, ef/2, ei/1, fg/2, gh/4, fk/6, gi/6, hk/7.

(a) Man gebe drei verschiedene Gerüste von G an.

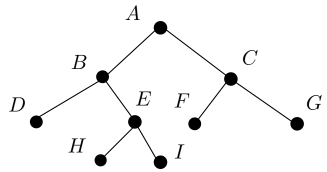
(b) Man bestimme mit Hilfe des Algorithmus von Kruskal ein Minimalgerüst von G und dessen Gesamtlänge.

312) Zum *Abarbeiten* der Knoten eines Binärbaumes verwendet man gerne rekursive Algorithmen, die in wohldefinierter Reihenfolge die folgenden Schritte ausführen:

(1) Bearbeite den aktuellen Knoten.

(2) Gehe zur Wurzel des linken Nachfolgebaums des aktuellen Knotens.

(3) Gehe zur Wurzel des rechten Nachfolgebaums des aktuellen Knotens.

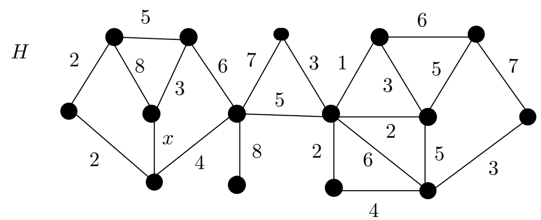


Am Beginn steht man bei der Wurzel des Gesamtbaumes. Führt man die genannten Schritte (1) bis (3) rekursiv in der angegebenen Reihenfolge aus, so spricht man von *Präordertraversierung*. Beim unten abgebildeten Baum werden die Knoten also in folgender Reihenfolge bearbeitet: $A, B, D, E, H, I, C, F, G$. Wie ändert sich diese Reihenfolge, wenn man im Algorithmus jeweils die Abfolge (2)(1)(3) nimmt (*Inordertraversierung*), wie wenn man die Abfolge (2)(3)(1) wählt (*Postordertraversierung*)?

313) Man zeige, dass für $n \geq 1$ die Anzahl aller (geordneten) vollen Binärbäume mit $n+1$ Blättern gleich der n-ten Catalan-Zahl C_n ist. (Hinweis: Man verwende die Rekursionsformel ("divide and conquer") für C_n.)

314) Man zeige, dass die Anzahl der binären Suchbäume mit n Knoten durch die Catalan-Zahl C_n gegeben ist. (Hinweis: Man stelle eine Bijektion zwischen binären Suchbäumen und (geordneten) vollen Binärbäumen her und verwende das Ergebnis der vorigen Aufgabe.)

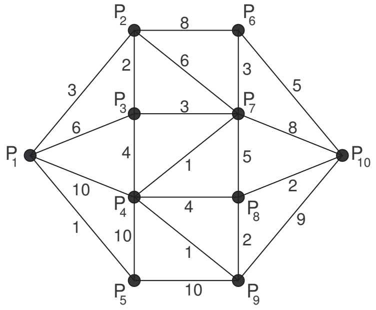
315–318) Man bestimme im folgenden Graphen H für den angegebenen Wert von x mit Hilfe des Kruskalalgorithmus einen minimalen und einen maximalen spannenden Baum.



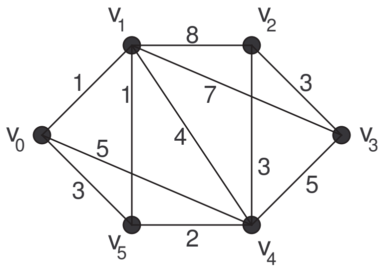
315) $x = 2$ **316)** $x = 3$

317) $x = 4$ **318)** $x = 5$

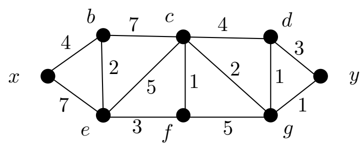
319) In der folgenden schematisch skizzierten Landkarte sind für eine bestimmte Fracht die Transportkosten zwischen einzelnen Orten angegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus einen billigsten Weg vom Ort P_1 zum Ort P_{10}.



320) Im nachstehenden bewerteten Graphen bestimme man mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus einen Entfernungsbaum bezüglich des Knotens v_0.



321) Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Dijkstra einen kürzesten Weg zwischen den Knoten x und y im folgenden Graphen:



322) Bestimmen Sie zur folgenden Permutation π die Zyklendarstellung, das Vorzeichen, sowie die inverse Permutation π^{-1}:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 8\,9\,1\,7\,2\,5\,4\,3\,6 \end{pmatrix}.$$

323) Bestimmen Sie zur folgenden Permutation π die Zyklendarstellung, das Vorzeichen, sowie die inverse Permutation π^{-1}:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 3\,5\,8\,7\,6\,9\,4\,1\,2 \end{pmatrix}.$$

324) Man bestimme zu den Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

die Permutationen $\sigma \circ \rho^2$ und $\sigma^{-1}\rho^{-1}\sigma^2$ sowie deren Zyklendarstellungen und Vorzeichen.

325) Gegeben sind die Permutationen $\pi = (1346)$, $\rho = (134562)$ und $\sigma = (126)(35)$ der S_6. Man berechne $\pi\rho^{-1}\sigma^2$ und $\pi\rho\sigma^{-2}$ sowie deren Zyklendarstellungen und Vorzeichen.

326) Gegeben seien die folgenden Permutationen der S_8:

$$\pi = (13746), \quad \rho = (143652) \quad \text{und } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\pi\rho^{-1}\sigma^2$ und $\pi^2\rho\sigma^{-2}$ sowie deren Zyklendarstellungen und Vorzeichen.

327) Untersuchen Sie, ob π eine Permutation festlegt und geben Sie gegebenenfalls den Graphen, die Zyklendarstellung, sowie die Zyklendarstellung ohne Klammern an:

$$\pi(k) = 4k + 2 \bmod 10, \ \ 0 \le k \le 9.$$

328) Man untersuche, ob die Funktionen $f(x) = x^2 \bmod 10$ bzw. $g(x) = x^3 \bmod 10$ auf der Menge $\{0, 1, \ldots, 9\}$ bijektiv sind, d.h. Permutationen festlegen.

329) Schreiben Sie π aus Aufgabe 327 als Produkt von Zweierzyklen.

330) Sei eine Permutation π von $\{1, 2, \ldots, n\}$ in zweizeiliger Darstellung gegeben. Unter der Inversionstafel von π versteht man die Folge $(b_1, \ldots, b_n)$, wobei $b_k \ge 0$ angibt, wieviele größere Zahlen in der zweiten Zeile links vom Element k stehen. Bestimmen Sie für die Permutation π aus Aufgabe 327) die Inversionstafel.
Wie kann man bei Kenntnis der Inversionstafel die Permutation rekonstruieren? Demonstrieren Sie ein geeignetes Verfahren am obigen Beispiel.

331) Gegeben seien die folgenden zweistelligen partiellen Operationen $\bullet$ in der Menge M. Man untersuche, in welchem Fall eine Operation in M vorliegt. Welche der Operationen sind assoziativ, welche kommutativ?

(a) $M = \{-1, 0, 1\}$, $\bullet$ gewöhnliche Addition bzw. Multiplikation

(b) $M = \mathbb{N}$, $a \bullet b = 2^{ab}$

(c) $M = \mathbb{Q}$, $a \bullet b = ab + 1$

(d) $M = \mathbb{R}$, $a \bullet b = |a + b|$

(e) $M \neq \emptyset$, $a \bullet b = a$

332) Man zeige, dass $\langle \mathbb{Z}, \bullet \rangle$ mit der Operation

$$a \bullet b = a + b - ab, \ \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

eine Halbgruppe ist. Gibt es ein neutrales Element? Wenn ja, welche Elemente haben Inverse?

333) Sind X und Y Mengen von Wörtern über einem Alphabet, dann bezeichne XY die Menge $\{w_1w_2 | w_1 \in X, w_2 \in Y\}$. Für $A = \{a\}$ und $B = \{b, c\}$ bestimme man

$$A^*, \ B^*, \ A^*B, \ AB^*, \ (A \cup B)^* \ \text{ und } \ ABA^*B.$$

334–352) Untersuchen Sie, ob die Menge M mit der Operation $\circ$ ein Gruppoid, eine Halbgruppe, ein Monoid bzw. eine Gruppe ist:

334) $M = \{0, 1, 2\}$, $m \circ n = \min(m + n, 2)$

335) $M = \{0, 1, 2, 3\}$, $m \circ n = \min(mn, 3)$

336) $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $m \circ n = mn$

337) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$, $z_1 \circ z_2 = \frac{z_1 z_2}{2}$

338) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $z_1 \circ z_2 = z_1 z_2$

339) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$, $z_1 \circ z_2 = z_1 z_2$

340) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2 \text{ oder } |z| = \frac{1}{2}\}$, $z_1 \circ z_2 = z_1 z_2$

341) $M = \mathcal{P}(A)$, d. h. die Potenzmenge der Menge A, $B \circ C = B \cup C$.

342) $M = \mathcal{P}(A)$, d. h. die Potenzmenge der Menge A, $B \circ C = B \cap C$.

343) $M = \mathcal{P}(A)$, d. h. die Potenzmenge der Menge A, $B \circ C = B \triangle C$ (die symmetrische Differenz).

344) $M = \mathcal{P}(A)$, d. h. die Potenzmenge der Menge A, $B \circ C = B \setminus C$ (die Mengendifferenz).

345) $M = \mathbb{Q}$, $a \circ b = a - b$.

346) $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$, $a \circ b = \frac{a+b}{1+ab}$.

347) $M = \mathbb{Q}$, $a \circ b = ab + 1$.

348) $M = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$, $a \circ b = a + b - ab$.

349) $M = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $a \circ b = a/b$.

350) $M = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$, $a \circ b = a + b + ab$.

351) $M = \mathbb{N}$, $a * b = \max\{a, b\}$.

352) $M = \mathbb{N}$, $a * b = \min\{a, b\}$.

353–354) Man ergänze die folgende Operationstafel so, dass $\langle G = \{a, b, c\}, *\rangle$ eine Gruppe ist.

353)

$*$	a	b	c
a	a		
b			
c			

354)

$*$	a	b	c
a	b		
b			
c			

355–358) Man ergänze die folgende Operationstafel so, dass $\langle G = \{a, b, c, d\}, *\rangle$ eine Gruppe ist.

355)

$*$	a	b	c	d
a	a			
b		a		
c			a	
d				

356)

$*$	a	b	c	d
a	a			
b		c		
c				
d				

357)

$*$	a	b	c	d
a	b			
b		b		
c			b	
d				

358)

$*$	a	b	c	d
a	a			
b			a	
c				
d				a

359) Man zeige: Gilt für ein Element a einer Gruppe G: $a * a = a$, dann ist a das neutrale Element von G.

360) Man zeige: Eine nichtleere Teilmenge U einer Gruppe G (mit neutralem Element e) ist genau dann Untergruppe von G, wenn

$$\text{(i) } a, b \in U \Rightarrow ab \in U, \qquad \text{(ii) } e \in U, \qquad \text{(iii) } a \in U \Rightarrow a^{-1} \in U$$

für alle $a, b \in G$ erfüllt ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a, b \in U \Rightarrow ab^{-1} \in U$.

361) Man zeige: Eine nichtleere Teilmenge U einer endlichen Gruppe G ist genau dann Untergruppe von G, wenn

$$a, b \in U \Rightarrow ab \in U$$

für alle $a, b \in G$ gilt.

362) Beweisen Sie, dass in einer Gruppe $(G, \cdot)$ die folgenden Rechenregeln für alle $a, b, c \in G$ gelten:

(a) $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$

(b) $(a^{-1})^{-1} = a$

(c) $(ab)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(d) Die Gleichung $a \cdot x = b$ ist in G immer eindeutig lösbar.

363) Man bestimme alle Untergruppen der Gruppe S_3 aller Permutationen von drei Elementen mit der Operation der Hintereinanderausführung.

364) Man bestimme alle Untergruppen einer zyklischen Gruppe der Ordnung 6, d. h., von $G = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$.

365) Man zeige: Der Durchschnitt zweier Untergruppen ist wieder eine Untergruppe.
Gilt dies auch für die Vereinigung zweier Untergruppen?

366) Sei G die Menge der Permutationen

$$\{\mathrm{id}_{\{1,2,3,4\}}, (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\}.$$

Man veranschauliche G, indem man die Permutationen auf die vier Eckpunkte eines Quadrates wirken lasse und als geometrische Operationen interpretiere. Man zeige mit Hilfe dieser Interpretation, dass G eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_4 ist (Symmetriegruppe des Quadrates), und bestimme alle Untergruppen.

367) In der Symmetriegruppe des Quadrates aus Aufgabe 366) bestimme man die Rechts- bzw. Linksnebenklassenzerlegung nach einer (a) von einer Drehung, (b) von einer Spiegelung erzeugten Untergruppe.

368) Sei U die von (1)(23) erzeugte Untergruppe der S_3. Man bestimme die Rechtsnebenklassen von U. Ist U Normalteiler von S_3?

369) Sei U die von (2)(13) erzeugte Untergruppe der S_3. Man bestimme die Linksnebenklassen von U. Ist U Normalteiler von S_3?

370) Sei U die von (123) erzeugte Untergruppe der S_3. Man bestimme die Linksnebenklassen von U. Weiters stelle man fest, ob U Normalteiler von S_3 ist und bestimme gegebenenfalls die Gruppentafel der Faktorgruppe S_3/U.

371) Es sei U eine Untergruppe der Gruppe G. Man zeige, dass die Relation $a \sim b \iff a \circ U = b \circ U$ eine Äquivalenzrelation auf G ist und dass die Äquivalenzklassen von $\sim$ die Linksnebenklassen von U in G sind.

372) Man zeige, dass die von $\bar{3}$ erzeugte Untergruppe U von $\langle \mathbb{Z}_9, +\rangle$ ein Normalteiler von $\langle \mathbb{Z}_9, +\rangle$ ist und bestimme die Gruppentafel der Faktorgruppe $\mathbb{Z}_9/U$.

373) Man zeige, dass die von $\bar{4}$ erzeugte Untergruppe U von $\langle\mathbb{Z}_{12},+\rangle$ ein Normalteiler von $\langle\mathbb{Z}_{12},+\rangle$ ist und bestimme die Gruppentafel der Faktorgruppe $\mathbb{Z}_{12}/U$.

374) Man zeige, dass die von $\bar{5}$ erzeugte Untergruppe U von $\langle\mathbb{Z}_{15},+\rangle$ ein Normalteiler von $\langle\mathbb{Z}_{15},+\rangle$ ist und bestimme die Gruppentafel der Faktorgruppe $\mathbb{Z}_{15}/U$.

375) Man zeige, dass die von $\bar{3}$ erzeugte Untergruppe U von $\langle\mathbb{Z}_{12},+\rangle$ ein Normalteiler von $\langle\mathbb{Z}_{12},+\rangle$ ist und bestimme die Gruppentafel der Faktorgruppe $\mathbb{Z}_{12}/U$.

376) Man zeige: Das Zentrum $Z(G)=\{x\in G\mid x\cdot y=y\cdot x \text{ für alle } y\in G\}$ einer Gruppe $\langle G,\cdot\rangle$ ist Normalteiler von G.

377–378) Definition: Der Kommutator $K(G)$ einer Gruppe G ist jene Untergruppe von G, die von allen Elementen $xyx^{-1}y^{-1}$ $(x,y\in G)$ erzeugt wird.

377) Man zeige: $K(G)$ ist ein Normalteiler von G.
(Hinweis: Man beweise zunächst $axyx^{-1}y^{-1}a^{-1}=\big((ax)y(ax)^{-1}y^{-1}\big)\big(yay^{-1}a^{-1}\big)$.)

378) Man zeige: Die Faktorgruppe $G/K(G)$ ist kommutativ. (Hinweis: $ab=baa^{-1}b^{-1}ab$.)

379) Sei $\varphi:G\to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Man zeige, dass dann $\varphi(G)$ eine Untergruppe von H ist.

380) Sei $\varphi:G\to H$ ein bijektiver Gruppenhomomorphismus. Man zeige, dass dann auch $\varphi^{-1}:H\to G$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

381) Seien $\varphi:G\to H$ und $\psi:H\to K$ Gruppenhomomorphismen. Man zeige: $\psi\circ\varphi:G\to K$ ist auch ein Gruppenhomomorphismus.

382) Sei $\varphi:G\to H$ ein Gruppenhomomorphismus und e das neutrale Element von G. Man zeige, dass $\varphi(e)$ das neutrale Element von H ist. (Hinweis: Man verwende Bsp. 359.)

383) Sei $\varphi:G\to H$ ein Gruppenhomomorphismus und N ein Normalteiler von H. Man zeige, dass dann $U=\varphi^{-1}(N)$ ein Normalteiler von G ist.

384) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe der von 0 verschiedenen Restklassen modulo 5 mit der Multiplikation.

385) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe der Restklassen modulo 4 mit der Addition.

386) Man bestimme alle Untergruppen der $\langle\mathbb{Z}_{12},+\rangle$.

387) Man bestimme alle Untergruppen der $\langle\mathbb{Z}_{13},+\rangle$.

388) Man bestimme alle Untergruppen der $\langle\mathbb{Z}_{18},+\rangle$.

389) Man bestimme alle Untergruppen der $\langle\mathbb{Z}_{19},+\rangle$.

390) Sei $(G,*)$ eine Gruppe. Untersuchen Sie, ob $(G\times G,\circ)$ mit $(a,b)\circ(c,d)=(a*c,b*d)$ ebenfalls eine Gruppe ist.

391) Seien $(G,*)$ und $(H,\cdot)$ zwei Gruppen. Untersuchen Sie, ob $(G\times H,\circ)$ mit $(a,b)\circ(c,d)=(a*c,b\cdot d)$ ebenfalls eine Gruppe ist.

392) Auf $\mathbb{Z}_2^2$ sei eine Addition $+_2$ komponentenweise definiert, d.h., $(\bar{a}_1,\bar{a}_2)+_2(\bar{b}_1,\bar{b}_2)=(\bar{a}_1+\bar{b}_1,\bar{a}_2+\bar{b}_2)$. Beweisen Sie, dass $(\mathbb{Z}_2^2,+_2)$ eine Gruppe ist und geben Sie auch die Operationstafel von $+_2$ an.

393) Von der Abbildung $f:(\mathbb{Z}_3)^2\to(\mathbb{Z}_3)^4$ sei bekannt, dass f ein Gruppenhomomorphismus bezüglich der Addition ist (die jeweils komponentenweise definiert sein soll), sowie dass $f(0,1)=(0,1,1,2)$, $f(1,0)=(1,0,2,0)$. Man ermittle daraus $f(w)$ für alle $w\in(\mathbb{Z}_3)^2$.

394) Wie Bsp. 393) für $f(1,0)=(0,1,2,1)$, $f(0,1)=(1,0,0,2)$.

395) Wie Bsp. 393) für $f(1,0)=(1,0,0,2)$, $f(1,1)=(1,2,0,1)$.

396) Wie Bsp. 393) für $f(2,0)=(0,1,2,2)$, $f(1,2)=(2,2,1,0)$.

397) Man bestimme die „primen" Restklassen modulo 9, d. h. alle Restklassen $\bar{a}$ für die gilt $\mathrm{ggT}(a,9)=1$. Man zeige, dass die Menge Γ_9 dieser primen Restklassen bezüglich der Restklassenmultiplikation eine Gruppe bildet.

398) Wie Bsp. 397) für die primen Restklassen modulo 16.

399) Wie Bsp. 397) für die primen Restklassen modulo 18.

400) Sei $\langle\Gamma_9,\cdot\rangle$ die Gruppe aus Bsp. 397). Man bestimme die vom Element $\bar{8}$ erzeugte Untergruppe sowie deren Nebenklassen in Γ_9.

401) Sei $\langle\Gamma_{16},\cdot\rangle$ die Gruppe aus Bsp. 398). Man bestimme die vom Element $\bar{9}$ erzeugte Untergruppe sowie deren Nebenklassen in Γ_{16}.

402) Sei $\langle\Gamma_{18},\cdot\rangle$ die Gruppe aus Bsp. 399). Man bestimme die vom Element $\bar{7}$ erzeugte Untergruppe sowie deren Nebenklassen in Γ_{18}.

403) Sei G eine Gruppe, deren Ordnung $|G|$ eine Primzahl ist. Man zeige, dass G nur die trivialen Untergruppen $\{e\}$ und G hat.

404) Betrachten Sie die Gruppe $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$. Sei $U=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$. Zeigen Sie, dass U ein Normalteiler von $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ ist. Zeigen Sie weiters, dass $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}, z\mapsto|z|$ ein Gruppenhomomorphismus ist und verwenden Sie diesen und den Homomorphiesatz, um eine zu $\mathbb{C}\setminus\{0\}/U$ isomorphe Untergruppe von $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ zu finden.

405) Betrachten Sie die Gruppe $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^+$ ein Normalteiler von $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ ist. Zeigen Sie weiters, dass $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}, z\mapsto z/|z|$ ein Gruppenhomomorphismus ist und verwenden Sie diesen und den Homomorphiesatz, um eine zu $\mathbb{C}\setminus\{0\}/\mathbb{R}^+$ isomorphe Untergruppe von $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ zu finden.

406) Betrachten Sie die Gruppe $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ein Normalteiler von $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ ist. Zeigen Sie weiters, dass $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}, z\mapsto(z/|z|)^2$ ein Gruppenhomomorphismus ist und verwenden Sie diesen und den Homomorphiesatz, um eine zu $\mathbb{C}\setminus\{0\}/\mathbb{R}\setminus\{0\}$ isomorphe Untergruppe von $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ zu finden.

407–414) Untersuchen Sie, ob die folgenden Strukturen Ringe, Integritätsringe bzw. Körper sind:

407) $M=\{0,1\}$ mit der Addition modulo 2 und dem Produkt $a\cdot b=0$ für alle $a,b\in M$.

408) $M=\{0,1,2\}$ mit der Addition modulo 3 und dem Produkt $a\cdot b=1$ für alle $a,b\in M$.

409) $M=\mathbb{Q}[\sqrt{5}]=\{a+b\sqrt{5}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ mit der Addition und Multiplikation aus $\mathbb{R}$.

410) Wie 409), jedoch $M=\mathbb{Q}[\sqrt{6}]$.

411) Wie 409), jedoch $M=\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$.

412) Wie 409), jedoch $M=\mathbb{Q}[\sqrt{14}]$.

413) $M=\{0,1,2\}$ mit der Addition modulo 3 und der Multiplikation modulo 4.

414) $M=\{0,1\}$ mit der Addition $0+0=0$, $0+1=1+0=1$, $1+1=1$, und der Multiplikation modulo 2.

415) Von der Menge $K\subseteq\mathbb{C}$ sei bekannt: i) $\mathbb{R}\subseteq K$, ii) $1+3i\in K$ und iii) $\langle K,+,\cdot\rangle$ ist ein Körper (mit der Addition bzw. Multiplikation aus $\mathbb{C}$). Zeigen Sie, dass $K=\mathbb{C}$ sein muss.

416) Von der Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ sei bekannt: i) $\mathbb{R} \subseteq K$, ii) $1 - i \in K$ und iii) $\langle K, +, \cdot \rangle$ ist ein Körper (mit der Addition bzw. Multiplikation aus $\mathbb{C}$). Zeigen Sie, dass $K = \mathbb{C}$ sein muss.

417) Gibt es eine Menge K mit $\mathbb{R} \subsetneq K \subsetneq \mathbb{C}$, die mit der üblichen Addition bzw. Multiplikation einen Körper bildet? (Begründung!)

418) Sei $\langle R, +, \cdot \rangle$ ein Ring mit Einselement und $E(R)$ die Menge derjenigen Elemente in R, die bezüglich der Multiplikation ein inverses Element besitzen. Zeigen Sie, dass $E(R)$ mit der Multiplikation eine Gruppe bildet (die *Einheitengruppe* von R).

419) Man zeige, dass für eine beliebige Menge M die Algebra $\langle \mathbf{P}(M), \Delta, \cap \rangle$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist. Für welche M ist dieser Ring sogar ein Körper?

420) Bestimmen Sie die Einheitengruppe (vgl. 418) des Restklassenringes $\mathbb{Z}_9$.

421) Man bestimme $\mathbb{Z}_6^*$ und $\mathbb{Z}_3^*$ und überprüfe, ob diese beiden Gruppen isomorph sind.

422–424) Beweisen Sie, dass die angegebene Identität in einem Ring R für alle $a, b \in R$ gilt ($-c$ bezeichnet das additive Inverse zu c):

422) $(-a)b = -(ab)$

423) $a(-b) = -(ab)$

424) $(-a)(-b) = ab$

425) Sei $\langle R, +, \cdot \rangle$ ein Ring. Man zeige, dass dann auch $R \times R$ mit den Operationen

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$$

ein Ring ist.

426) Seien $\langle R_1, +_1, \cdot_1 \rangle$ und $\langle R_2, +_2, \cdot_2 \rangle$ Ringe. Man zeige, dass dann auch $R_1 \times R_2$ mit den Operationen

$$(a, b) + (c, d) = (a +_1 c, b +_2 d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot_1 c, b \cdot_2 d)$$

ein Ring ist.

427) Sei $\langle R, +, \cdot \rangle$ ein Ring, in dem $a^2 = a$ für alle $a \in R$ gilt. Man zeige, dass dann auch $a + a = 0$ für alle $a \in R$ gilt. (Hinweis: Man betrachte $(a + a)^2$.)

428) Sei $\langle R, +, \cdot \rangle$ ein Ring, in dem $a^2 = a$ für alle $a \in R$ gilt. Man zeige, dass dann R kommutativ ist. (Hinweis: Man betrachte $(a + a)^2$ und $(a + b)^2$.)

429) Sei R ein Ring und $R[[z]]$ die formalen Potenzreihen $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ mit Koeffizienten $a_n \in R$. Man zeige, dass $R[[z]]$ mit den Operationen

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n \geq 0} b_n z^n = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n, \quad \sum_{n \geq 0} a_n z^n \cdot \sum_{n \geq 0} b_n z^n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n$$

ein Ring ist. Man zeige weiters, dass $R[[z]]$ ein Integritätsring ist, wenn R ein Integritätsring ist.

430) Man ermittle, ob beim Übergang von R zu $R \times R$ (Bsp. 425)) die folgenden Eigenschaften erhalten bleiben:
a) Kommutativität, b) Nullteilerfreiheit, c) Existenz eines Einselementes.

431) Betrachten Sie den Ring $R[[x]]$ aus Aufgabe 429). I sei die Menge der Elemente $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ von $R[[x]]$ mit $a_0 = 0$. Zeigen Sie: I ist ein Ideal von $R[[x]]$.

432) Seien I_1, I_2 zwei Ideale eines Ringes R. Zeigen Sie, dass dann $I_1 \cap I_2$ ein Ideal von R ist. Gilt dies auch für $I_1 \cup I_2$?

433) Sei $\langle R, +, \cdot \rangle$ ein beliebiger Ring und $A \subseteq R$. Weiters sei $\mathcal{I}(A)$ die Menge aller Ideale von R, die A umfassen. Zeigen Sie: $\bigcap_{I \in \mathcal{I}(A)} I$ ist das kleinste Ideal von R, das A umfasst.

434) Seien I_1, I_2 zwei Ideale eines Ringes $\langle R, +, \cdot \rangle$. Man zeige, dass dann $I_1 \times I_2$ ein Ideal von $R \times R$ ist.

435) Sei $\varphi : R_1 \to R_2$ ein Ringhomomorphismus und I ein Ideal von R_2. Man zeige, dass $\varphi^{-1}(I)$ Ideal von R_1 ist.

436) Man bestimme mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen alle Lösungen von $\bar{4}x^2 + \bar{7}x + \bar{7} = \bar{0}$ über dem Körper $\mathbb{Z}_{11}$.

437) Man bestimme mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen alle Lösungen von $\bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{6} = \bar{0}$ über dem Körper $\mathbb{Z}_7$.

438) Man bestimme mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen alle Lösungen von $\bar{2}x^2 + x + \bar{7} = \bar{0}$ über dem Körper $\mathbb{Z}_{13}$.

439–443) Ein Polynom heißt irreduzibel, wenn es nicht als Produkt zweier Polynome kleineren Grades darstellbar ist.

439) Man untersuche das Polynom $x^2 + x + 1$ auf Irreduzibilität a) über $\mathbb{Q}$, b) über $\mathbb{Z}_3$.

440) Man untersuche das Polynom $x^2 + x + 1$ auf Irreduzibilität a) über $\mathbb{R}$, b) über $\mathbb{Z}_5$.

441) Man untersuche das Polynom $x^2 + 3$ auf Irreduzibilität a) über $\mathbb{Q}$, b) über $\mathbb{Z}_5$.

442) Man untersuche das Polynom $x^3 + x^2 + 5$ auf Irreduzibilität a) über $\mathbb{Q}$ und b) über $\mathbb{Z}_7$.

443) Man untersuche das Polynom $x^3 - x^2 + 1$ auf Irreduzibilität a) über $\mathbb{Q}$ und b) über $\mathbb{Z}_5$.

444–445) Man zeige, dass die folgenden algebraischen Strukturen Verbände sind. Welche sind außerdem distributiv, und welche sind Boolesche Algebren?

444) a) $(\mathbb{R}, \min, \max)$, b) $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \mathrm{ggT}, \mathrm{kgV})$.

445) a) $(\mathbf{P}(A), \cap, \cup)$, b) $(\{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ ist endlich oder } \mathbb{N} \setminus X \text{ ist endlich}\}, \cap, \cup)$

446) Sei $(M, \wedge, \vee)$ eine Boolesche Algebra. Beweisen Sie:

a) $\forall a \in M : a \vee 1 = 1, a \wedge 0 = 0$.

b) Falls $a \vee b = 1$ und $a \wedge b = 0$, so folgt $b = a'$

447) Sei M die Menge aller positiven Teiler von 60. Bestimmen Sie alle Komplemente in $(M, \mathrm{ggT}, \mathrm{kgV})$. Ist diese Struktur eine Boolesche Algebra?

448) Sei $(M, \wedge, \vee)$ ein Verband mit 5 Elementen. Zeigen Sie, dass $(M, \wedge, \vee)$ keine Boolesche Algebra ist.
Hinweis: Betrachten Sie alle möglichen Hassediagramme der durch den Verband bestimmten Halbordnung.

449) Sei $(M, \wedge, \vee)$ eine Boolesche Algebra. Beweisen Sie:

a) $(a')' = a$, b) $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ und $(a \vee b)' = a' \wedge b'$.

450–455) Bildet $\mathbb{R}^2$ mit den angegebenen Operationen einen Vektorraum über $\mathbb{R}$?

450) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$, $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$.

451) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (0, x_2 + y_2)$, $\lambda(x_1, x_2) = (0, \lambda x_2)$.

452) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_2 + y_1, x_1 + y_2)$, $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

453) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_2, x_2 + y_1)$, $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

454) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$, $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, x_2)$.

455) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (0, x_2 + y_2)$, $\lambda(x_1, x_2) = (x_1, \lambda x_2)$.

456–467) Untersuchen Sie, ob W Teilraum des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ ist und beschreiben Sie die Menge W geometrisch:

456) $W = \{(x, y, z) \mid x = 2y\}$

457) $W = \{(x, y, z) \mid y = -z\}$

458) $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$

459) $W = \{(x, y, z) \mid xy = 0\}$

460) $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z \leq 0\}$

461) $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z \geq 0\}$

462) $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$

463) $W = \{(x, y, z) \mid x = 2z\}$

464) $W = \{(x, y, z) \mid x = -z\}$

465) $W = \{(x, y, z) \mid xy = 0\}$

466) $W = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

467) $W = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 0\}$

468–469) Untersuchen Sie, ob W Teilraum des Vektorraums V über K ist.

468) Sei V der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über $K = \mathbb{R}$, W die Menge aller *ungeraden* Funktionen in V, d. h. aller Funktionen f, für die gilt: $f(x) = -f(-x)$, für alle $x \in \mathbb{R}$.

469) Sei V Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über $K = \mathbb{R}$, W die Menge aller *geraden* Funktionen in V, d. h. aller Funktionen f, für die gilt: $f(x) = f(-x)$, für alle $x \in \mathbb{R}$.

470) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ (vgl. Aufgabe 409)) bildet mit den in $\mathbb{R}$ ausgeführten Operationen Addition und Produkt mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

471) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ (vgl. Aufgabe 409)) bildet mit den in $\mathbb{R}$ ausgeführten Operationen Addition und Produkt mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

472) Zeigen Sie: $\mathbb{C}$ bildet mit den in $\mathbb{C}$ ausgeführten Operationen Addition und Produkt mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

473) Zeigen Sie: In jedem Vektorraum V über dem Körper K gilt $\lambda \cdot o = o$ für alle $\lambda \in K$ und $0 \cdot a = o$ für alle $a \in V$.

474–476) Zeigen Sie, dass in jedem Vektorraum V über dem Körper K für alle $a \in V$, $\lambda \in K$ gilt:

474) $(-\lambda)a = -(\lambda a)$

475) $\lambda(-a) = -(\lambda a)$

476) $(-\lambda)(-a) = \lambda a$

477) Zeigen Sie: Die Menge aller Polynome $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ vom Grad kleiner gleich 4 mit Koeffizienten a_i aus $\mathbb{Q}$ bildet mit der üblichen Addition und dem üblichen Produkt mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

478) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 477) der die Polynome x und x^3 enthält.

479) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 477) der die Polynome $x - x^2$ und $x + x^3$ enthält.

480) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 477) der die Polynome $2x^2 + x - 1$, $3x^2 - x + 2$ und $5x^2 - 5x + 8$ enthält.

481) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 477) der die Polynome $1 + x - x^2$, $-1 + 5x - 4x^2$ und $4 - 2x + x^2$ enthält.

482) Zeigen Sie: Die Menge aller Polynome $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ vom Grad kleiner gleich 3 mit Koeffizienten a_i aus $\mathbb{R}$ bildet mit der üblichen Addition und dem üblichen Produkt mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Basis dieses Vektorraums, die nur Polynome dritten Grades enthält.

483) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 482) der die Polynome x und x^2 enthält.

484) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 482) der die Polynome $2x^2 - x^3$, $3x^2 - x - 1$ und $x^2 + 3x^3$ enthält.

485) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 482) der die Polynome $2x^2 - x^3$, $2x^2 - 5x + 2$ und $x^2 + 3x^3$ enthält.

486) Zeigen Sie, dass $B = \{(1, 2, 4), (2, 4, 1), (4, 2, 1)\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

487) Untersuchen Sie, ob $B = \{(-1, 4, -4), (2, -4, 7), (3, 2, 1)\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

488) Untersuchen Sie, ob $B = \{(0, 7, 4), (-2, 4, -5), (6, 2, -1)\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

489) Zeigen Sie, dass die Vektoren x_1, x_2, x_3 eines Vektorraumes genau dann linear unabhängig sind, wenn $x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3$ linear unabhängig sind.

490) Zeigen Sie, dass die Vektoren x_1, x_2, x_3 eines Vektorraumes genau dann linear unabhängig sind, wenn $x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_3$ linear unabhängig sind.

491) Zeigen Sie, dass die Vektoren x_1, x_2, x_3 eines Vektorraumes genau dann linear unabhängig sind, wenn $x_1 - x_2, x_2, x_2 - x_3$ linear unabhängig sind.

492) Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind: $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 3, 4, 5)$, $(3, 4, 5, 6)$.

493) Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren des $\mathbb{Z}_7^4$ linear unabhängig sind: $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 3, 4, 5)$, $(3, 4, 5, 6)$.

494) Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren des $\mathbb{Z}_{11}^4$ linear unabhängig sind: $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 3, 4, 5)$, $(3, 4, 5, 6)$.

495) Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind: $(4, 3, 2, 1)$, $(2, 3, 4, 5)$, $(3, 4, -5, 1)$.

496) Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind: $(-1, 3, 2, -1)$, $(2, 2, -1, 1)$, $(3, -1, -2, 2)$.

497) Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind: $(-3, 3, 0, -2)$, $(0, 7, -1, 3)$, $(-3, 1, 0, -4)$.

498) Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren des $\mathbb{Z}_5^4$ linear unabhängig sind: $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(3, 4, 2, 1)$.

499) Sei $V = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}\right\}$ der Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten. Untersuchen Sie, ob $1 + x + x^3$, $3 - x + x^2$ und $-5 + x + x^2 - x^3$ linear unabhängig sind.

500) Wie 499, nur für $1 - x + x^3$, $3 - x^2 + x^3$ und $-5 + 3x + x^2 - 4x^3$.

501) Wie 499, nur für $1-x-3x^2$, $2-2x^2$ und $3+3x-2x^2$.

502) Sei $V=\{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ der Vektorraum aller reellwertigen Funktionen. Untersuchen Sie, ob f und g mit $f(x)=\sin(x)$ und $g(x)=\cos(x)$ linear unabhängig sind.

503) Wie 502, nur für $f(x)=\sin(x)$ und $g(x)=\sin(2x)$.

504) Wie 502, nur für $f(x)=\cos(x)$ und $g(x)=\cos(2x)$.

505) Wie 502, nur für $f(x)=\cos(x)$ und $g(x)=e^x$.

506) Wie 502, nur für f,g,h mit $f(x)=e^{-x}$, $g(x)=e^x$ und $h(x)=xe^x$.

507) Wie 502, nur für f,g,h mit $f(x)=e^x$, $g(x)=xe^x$ und $h(x)=x^2e^x$.

508) Wie 502, nur für f,g,h mit $f(x)=1$, $g(x)=e^x$ und $h(x)=e^{3x}$.

509) Sei
$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}.$$
Untersuchen Sie, ob die Matrizen I_2, A und A^2 im Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen linear unabhängig sind.

510) Sei
$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}.$$
Untersuchen Sie, ob die Matrizen I_2, A und A^2 im Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen linear unabhängig sind.

511) Sei
$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix} \text{ und } B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}.$$
Untersuchen Sie, ob die Matrizen A, B und B^2 im Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen linear unabhängig sind.

512) Sei
$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix} \text{ und } B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}.$$
Untersuchen Sie, ob die Matrizen A, B und $A\cdot B$ im Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen linear unabhängig sind.

513) Beweisen Sie, dass jede quadratische Matrix A als Summe einer symmetrischen Matrix B (d.h., $B=B^T$) und einer schiefsymmetrischen Matrix C (d.h., $C=-C^T$) geschrieben werden kann. (Hinweis: Wählen Sie $B=\frac{1}{2}(A+A^T)$.) Wie sieht diese Zerlegung konkret für die Matrix
$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 4 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$$
aus?

514–516) Untersuchen Sie, ob die angegebene Abbildung A von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung ist.

514) $A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7x_1+5x_2\\ x_1-2x_3\end{pmatrix}$

515) $A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1+5x_2\\ x_1-3x_3\end{pmatrix}$

516) $A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1+5x_2-x_3\\ -3x_2\end{pmatrix}$

517) Sei $V=\mathbb{C}^3$, $U=\{(z_1,z_2,z_3)\in V \mid z_1+z_2=z_3\}$, $W=\{(z_1,z_2,z_3)\in V \mid z_2=-z_1\}$. Zeigen Sie, dass U und W Teilräume von V sind und bestimmen Sie deren Dimension.

518) Sei $V=\mathbb{C}^3$, $U=\{(z_1,z_2,z_3)\in V \mid z_1-z_2=z_3\}$, $W=\{(z_1,z_2,z_3)\in V \mid z_2=z_1\}$. Zeigen Sie, dass U und W Teilräume von V sind und bestimmen Sie deren Dimension.

519) Sei $V=\mathbb{C}^3$, $U=\{(z_1,z_2,z_3)\in V \mid z_1=2z_2=3z_3\}$, $W=\{(z_1,z_2,z_3)\in V \mid z_2=0\}$. Zeigen Sie, dass U und W Teilräume von V sind und bestimmen Sie deren Dimension.

520) Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\ker(f)$ und $f(\mathbb{R}^2)$ sowie $\dim(\ker(f))$ und den Rang von f. Verifizieren Sie die Beziehung $\dim(\ker(f))+\operatorname{rg}(f)=\dim\mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basis.

521) Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\ker(f)$ und $f(\mathbb{R}^2)$ sowie $\dim(\ker(f))$ und den Rang von f. Verifizieren Sie die Beziehung $\dim(\ker(f))+\operatorname{rg}(f)=\dim\mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basis.

522) Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\ker(f)$ und $f(\mathbb{R}^2)$ sowie $\dim(\ker(f))$ und den Rang von f. Verifizieren Sie die Beziehung $\dim(\ker(f))+\operatorname{rg}(f)=\dim\mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basis.

523) Ein Produzent verarbeite die Rohstoffe R_1, R_2, R_3. Der Verbrauch der Rohstoffe während vier Wochen eines Monats sei wie folgt gegeben:

Woche / Rohstoff	R_1	R_2	R_3
1. Woche	8	4	12
2. Woche	10	6	5
3. Woche	7	8	5
4. Woche	11	7	9

Diese Rohstoffe sollen bei einem von zwei Lieferanten L_1, L_2 bezogen werden, wobei die Rohstoffpreise in nachstehender Tabelle angegeben sind:

Rohstoff / Lieferant	L_1	L_2
R_1	8	4
R_2	10	6
R_3	7	8

Man beschreibe die Rohstoffkosten mit Hilfe von geeigneten linearen Abbildungen und vergleiche sie für alle vier Wochen. Soll der Produzent beim Lieferanten L_1 oder L_2 bestellen?

524) Drei Produkte P_1, P_2, P_3 werden aus Rohstoffen R_1 und R_2 hergestellt. Die Herstellungskosten setzen sich aus den Rohstoffpreisen und den Arbeitskosten zusammen. Die benötigten Resourcen sind in der folgenden Tabelle gegeben.

Rohstoff/Produkt	P_1	P_2	P_3
R1	1	2	3
R2	2	3	1
Arbeit	7	8	3

Wie hoch sind die Kosten für R_1, R_2 und Arbeit, wenn die Herstellungskosten der Produkte P_1, P_2 bzw. P_3 EUR 27,– , EUR 17,– bzw. EUR 21,– betragen? Beschreiben Sie diesen Zusammenhang mit Hilfe geeigneter linearer Abbildungen.

525) Sei G die Menge aller regulären $n \times n$-Matrizen A über $\mathbb{R}$. Man zeige, dass $\langle G, \cdot \rangle$ eine Gruppe bildet.

526) Sei U die Menge aller $n \times n$-Matrizen B über $\mathbb{R}$ mit $\det B = \pm 1$. Man zeige, dass U Normalteiler von G (aus Bsp. 525) ist.

527) Sei G die Menge aller $n \times n$-Matrizen A über $\mathbb{R}$ mit $\det A > 0$. Man zeige, dass $\langle G, \cdot \rangle$ eine Gruppe bildet.

528) Sei U die Menge aller $n \times n$-Matrizen B über $\mathbb{R}$ mit $\det B = 1$. Man zeige, dass U Normalteiler von G (aus Bsp. 527) ist.

529) Sei G die Menge aller $n \times n$-Matrizen A über $\mathbb{R}$ mit $\det A \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Man zeige, dass $\langle G, \cdot \rangle$ eine Gruppe bildet.

530) Sei $V = \mathbb{R}_n[x]$ der Vektorraum der Polynome in x vom Grad $\leq n$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$. Sei weiters eine Abbildung D definiert durch

$$D(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

Untersuchen Sie, ob D eine lineare Abbildung ist. Untersuchen Sie D weiters auf Injektivität und Surjektivität.

531) Wie 530) für die Abbildung $E(p(x)) = p(x+1)$.

532) Wie 530) für die Abbildung $F(p(x)) = p(x+1) - p(x)$.

533) Bestimmen Sie die Matrix der linearen Abbildung D aus Aufgabe 530) bezüglich der Basis $B = \{x^0, x^1, \ldots, x^n\}$ von V.

534) Wie 533) für die Abbildung $E(p(x)) = p(x+1)$.

535) Wie 533) für die Abbildung $F(p(x)) = p(x+1) - p(x)$.

536) Sei $V = \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome in x mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$. Sei weiters eine Abbildung I definiert durch

$$I(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Untersuchen Sie, ob I eine lineare Abbildung ist. Ist diese Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv?

537) Wie 536) für die Abbildung $S(p(x)) = p(x-1)$.

538) Sei $V = \mathbb{R}_n[x]$ der Vektorraum der Polynome in x vom Grad $\leq n$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$. Sei weiters eine Abbildung A definiert durch

$$A(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k x^{k-2}.$$

Zeigen sie, dass A linear ist und bestimmen Sie die Matrix von A bezüglich der Basis $B = \{x^0, x^1, \ldots, x^n\}$ von V.

539) Untersuchen Sie die Lösbarkeit des folgenden Gleichungssystems und berechnen Sie gegebenenfalls mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens alle Lösungen:

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & +x_2 & -2x_3 & +4x_4 & = & 2 \\ -x_1 & +4x_2 & +3x_3 & -3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & +4x_2 & & +x_4 & = & 1 \end{array}$$

540–544) Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die Lösung des Gleichungssystems über dem Körper K:

540)
a) $K = \mathbb{R}$, b) Wie a), jedoch $K = \mathbb{Z}_2$.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

541)
a) $K = \mathbb{R}$, b) Wie a), jedoch $K = \mathbb{Z}_2$.

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

542)
a) $K = \mathbb{R}$, b) Wie a), jedoch $K = \mathbb{Z}_3$.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 &= 7 \end{aligned}$$

543)
a) $K = \mathbb{Q}$, b) Wie a), jedoch $K = \mathbb{Z}_3$.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

544)
a) $K = \mathbb{Q}$, b) Wie a), jedoch $K = \mathbb{Z}_{11}$.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 3x_1 + x_3 &= 4 \\ - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

545) Wir betrachten Systeme von drei Ebenengleichungen $f_i(x,y,z) = a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = b_i$ mit Lösungsmengen $L_i \subseteq \mathbb{R}^3$, $i = 1,2,3$. Geben Sie jeweils eine Systemmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

mit geeigneten a_{ij} und b_i aus $\mathbb{R}$ so an, dass die L_i folgende Lage zueinander haben:

(a) $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{(1,1,1)\}$.

(b) $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \emptyset$, und alle drei Schnitte $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cap L_3$ und $L_2 \cap L_3$ sind eindimensional und parallel zur z-Achse.

546) Wie 545, aber mit

(a) $L_1 \cap L_2 = L_1 \cap L_3 = L_2 \cap L_3$ ist die z-Achse.

(b) $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ und $L_1 \cap L_3 \neq \emptyset \neq L_2 \cap L_3$.

547–556) Bestimmen Sie den Rang der folgenden reellen Matrizen

547)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

548)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 & 7 \\ 5 & -4 & -6 & 7 & -8 \\ 3 & 2 & -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

549)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & -2 & 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

550)

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & -4 & -6 \\ 6 & 3 & -4 & 5 & 7 \\ 7 & -4 & 5 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

551)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

552)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ -2 & 3 & -4 & 5 & -6 \\ 3 & -4 & 5 & -6 & 7 \\ -4 & 5 & -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}$$

553)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & -7 \\ 3 & -4 & 5 & -6 & 7 & 8 \\ -4 & 5 & -6 & 7 & -8 & -9 \end{pmatrix}$$

554)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 7 \\ 3 & -4 & 5 & -6 & 7 & 8 \\ -4 & 5 & -6 & 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

555)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 5 & -6 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & -6 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -2 & 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

556)

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & -4 & 0 & 6 \\ -2 & 3 & -4 & -2 & -6 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

557) Sei $n \geq 1$. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix über $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & \dots & 3n-1 \\ 5 & 8 & 11 & \dots & 3n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3n-1 & 3n+2 & 3n+5 & \dots & 6n-4 \end{pmatrix}.$$

558) Sei $n \geq 1$. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix über $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 & \dots & 4n-2 \\ 6 & 10 & 14 & \dots & 4n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 4n-2 & 4n+2 & 4n+6 & \dots & 8n-6 \end{pmatrix}.$$

559–562) Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1}.

559)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

560)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

561)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

562)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

563) Berechnen Sie zur folgenden Matrix A mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ die Matrix A^3:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}.$$

564) Berechnen Sie zur folgenden Matrix A mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ die Matrix A^3:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

565) Für die Matrizen A, B mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

bestimme man $C = AB$ und verifiziere den Determinantensatz $\det C = \det A \cdot \det B$.

566) Für die Matrizen A, B mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

bestimme man $C = AB$ und verifiziere den Determinantensatz $\det C = \det A \cdot \det B$.

567) Man berechne

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 7 & 4 \\ 4 & 9 & 6 & 6 \end{vmatrix}.$$

568) Man berechne

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & -3 \end{vmatrix}.$$

569) Man berechne

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & -6 & -8 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & -4 & 7 & 12 \end{vmatrix}.$$

570) Man berechne

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

571) Berechnen Sie die Determinante aus Aufgabe 567 mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace.

572) Berechnen Sie die Determinante aus Aufgabe 568 mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace.

573) Berechnen Sie die Determinante aus Aufgabe 569 mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace.

574) Berechnen Sie die Determinante aus Aufgabe 570 mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace.

575) Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass A nichtsingulär ist und berechne A^{-1}. Schließlich ermittle man AA^{-1} sowie $A^{-1}A$.

576–579) Für welche $x \in \mathbb{Q}$ ist die Matrix A singulär? Bestimmen Sie für den angegebenen Wert von x die inverse Matrix A^{-1}.

576) $A = \begin{pmatrix} x & 2 & 2 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & x & -1 \end{pmatrix}, \quad x = 1.$

577) $A = \begin{pmatrix} 3 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \\ x & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = -1.$

578) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & x & -1 \end{pmatrix}, \quad x = 2.$

579) $A = \begin{pmatrix} 3 & x & -1 \\ 0 & 10 & 4x \\ 3x & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = -2$

580–581) Über welchem Körper $\mathbb{Z}_p$ (p Primzahl) ist die Matrix A singulär? Wählen Sie ein p aus, für das die Matrix regulär ist und bestimmen Sie für dieses p die inverse Matrix A^{-1}.

580) $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 9 \\ 9 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

581) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

582–589) Man bestimme die Eigenwerte der Matrix A sowie zu jedem Eigenwert alle Eigenvektoren:

582) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

583) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

584) $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

585) $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 10 \\ -8 & 11 & 2 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

586) $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 12 \\ -4 & -6 & -12 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

587) $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ -6 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

588) $A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 1 \\ 2 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

589) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

590) Gegeben sei die lineare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(2,1) \mapsto (-2,4)$ und $(-3,0) \mapsto (0,-6)$.

(a) Geben Sie eine geometrische Interpretation von f.

(b) Wie lautet die Matrixdarstellung für f (bezüglich der kanonischen Basis)?

(c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $f(x,y) = (8,6)$

(d) Geben Sie sämtliche Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren von f an (anschauliche Begründung genügt).

591)

(a) Für welche $i \in \{1,2,3\}$ gibt es eine lineare Abbildung $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften?

- $f_1 : (1,0) \mapsto (2,1,0), (0,1) \mapsto (1,2,3)$
- $f_2 : (1,0) \mapsto (2,1,0), (0,1) \mapsto (1,2,3), (1,1) \mapsto (2,2,2)$
- $f_3 : (1,0) \mapsto (2,1,0), (0,1) \mapsto (1,2,3), (1,1) \mapsto (3,3,3)$

(b) Wählen Sie als f eine lineare Abbildung f_i aus (a). Geben Sie die f zugehörige Matrix A, die dazu transponierte Matrix A^T sowie jene Matrix B an, welche $g := f \circ f^T$ entspricht, wenn $f^T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die A^T zugehörige lineare Abbildung ist.

(c) Bestimmen Sie die Determinante von B aus Teil (b); wie ergibt sich daraus die Determinante von $2B$?

(d) Besitzt B einen Eigenvektor zum Eigenwert 0?

592) Für die Vektoren $\mathbf{x} = (1,2,3)$, $\mathbf{y} = (3,-1,2)$ und $\mathbf{z} = (2,2,1)$ berechne man

(a) die Längen von $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$,

(b) den Winkel φ zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$,

(c) das Volumen des von $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ aufgespannten Parallelepipeds.

593) Wie 592 für die Vektoren $\mathbf{x} = (2,1,1)$, $\mathbf{y} = (3,-1,-2)$ und $\mathbf{z} = (1,2,1)$.

594) Wie 592 für die Vektoren $\mathbf{x} = (-1,1,0)$, $\mathbf{y} = (3,5,-7)$ und $\mathbf{z} = (6,6,1)$.

595) Im $\mathbb{R}^3$ sei ein verallgemeinertes Skalarprodukt gegeben durch die Matrix

$$G = \begin{pmatrix} 13 & 0 & -5 \\ 0 & 9 & -6 \\ -5 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie für die Vektoren $\mathbf{x} = (1,2,3)$ und $\mathbf{y} = (3,-1,2)$

(a) die Längen von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$,

(b) den Winkel φ zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$.

596) Wie 595, nur mit

$$G = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -5 \\ 5 & 10 & -15 \\ -5 & -15 & 25 \end{pmatrix}$$

597) Wie 595, nur mit $\mathbf{x} = (-1,0,1)$ und $\mathbf{y} = (2,-1,2)$

598)

(a) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ der beiden ebenen Vektoren $\mathbf{a} = (3,2)$ und $\mathbf{b} = (1,2)$ und berechnen Sie den Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.

(b) Halten Sie den Vektor $\mathbf{a} = (3,2)$ aus (a) fest und bestimmen Sie jenen Vektor $\mathbf{b}$ der Länge 1, für den $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ maximal wird.

(c) Sei U der Raum aller Vektoren $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, für welche die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & x_3 \end{pmatrix}$$

einen Rang ≤ 2 besitzt. Welche Dimension d hat U, sofern $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ linear unabhängig sind. (Begründung!)

(d) Geben Sie eine Basis B, bestehend aus Vektoren $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_d \in \mathbb{R}^3$, von U in (c) an, wenn $\mathbf{a} = (1,2,3)$ und $\mathbf{b} = (2,3,4)$.

599) Bestimmen Sie einen Wert $a \in \mathbb{Z}$, sodass die quadratische Form $3x^2 + axy + 2xz + 2y^2 + 2yz + 2z^2$ positiv definit ist.

600) Aus der Basis $B = \{(2,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$ des $\mathbb{R}^3$ soll mittels Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis gebildet werden (wobei das gewöhnliche innere Produkt zugrunde zu legen ist).

601) Man zeige, dass die Menge $C = \{000, 213, 022, 231\}$ eine Untergruppe von $\langle \mathbb{Z}_4^3, + \rangle$ bildet und bestimme die Nebenklassen von C.

602) Zu den Nebenklassen aus Bsp. 601) sollen die Nebenklassenanführer mit minimalem Gewicht, sowie für eine Auswahl von Anführern ein zugehöriges Korrekturschema $K(C)$ aufgestellt werden, das jedem Wort in $\mathbb{Z}_4^3$ ein entsprechendes Wort aus C zuordnet.

603) Man zeige, dass die Menge $C = \{000, 111, 222, 333\}$ eine Untergruppe von $\langle \mathbb{Z}_4^3, + \rangle$ bildet und bestimme die Nebenklassen von C.

604) Zu den Nebenklassen aus Bsp. 603) sollen die Nebenklassenanführer mit minimalem Gewicht, sowie für eine Auswahl von Anführern ein zugehöriges Korrekturschema $K(C)$ aufgestellt werden, das jedem Wort in $\mathbb{Z}_4^3$ ein entsprechendes Wort aus C zuordnet.

605) Sei $C = \{00000, 10010, 01001, 00111, 11011, 10101, 01110, 11100\}$. Man zeige, dass C ein Untergruppe von $\langle \mathbb{Z}_2^5, + \rangle$ bildet und bestimme die Nebenklassen von C.

606) Zu den Nebenklassen aus Bsp. 605) sollen die Nebenklassenanführer mit minimalem Gewicht, sowie für eine Auswahl von Anführern ein zugehöriges Korrekturschema $K(C)$ aufgestellt werden, das jedem Wort in $\mathbb{Z}_2^5$ ein entsprechendes Wort aus C zuordnet.

607) Ein (n,k)-Linearcode über $\mathbb{Z}_2$ ist durch die Kontrollmatrix H gegeben. Gesucht ist n, k, sowie die Menge C aller Codewörter.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

608) Für den Code aus Bsp. 607) sollen zu allen Wörtern vom Gewicht 1 und 2 die Syndrome berechnet werden. Man wähle anschließend zu jedem Syndrom einen Nebenklassenanführer mit minimalem Gewicht aus und stelle ein entsprechendes Korrekturschema $K(C)$ auf.

609) Ein (n,k)-Linearcode über $\mathbb{Z}_2$ ist durch die Kontrollmatrix H gegeben. Gesucht ist n, k, sowie die Menge C aller Codewörter.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

610) Für den Code aus Bsp. 609) sollen zu allen Wörtern vom Gewicht 1 und 2 die Syndrome berechnet werden. Man wähle anschließend zu jedem Syndrom einen Nebenklassenanführer mit minimalem Gewicht aus und stelle ein entsprechendes Korrekturschema $K(C)$ auf.

611) Ein (n,k)-Linearcode über $\mathbb{Z}_2$ ist durch die Kontrollmatrix H gegeben. Gesucht ist n, k, sowie die Menge C aller Codewörter.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

612) Für den Code aus Bsp. 611) sollen zu allen Wörtern vom Gewicht 1 und 2 die Syndrome berechnet werden. Man wähle anschließend zu jedem Syndrom einen Nebenklassenanführer mit minimalem Gewicht aus und stelle ein entsprechendes Korrekturschema $K(C)$ auf.

613–614) Es sei ein (n, k)-Linearcode durch die Generatormatrix G gegeben. Man bestimme n, k, sowie eine Kontrollmatrix H, die möglichst viele Nullen enthält.

613)

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

614)

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

615) Gibt es einen zyklischen Linearcode über $\mathbb{Z}_2$, der das Wort $w = 001111$ enthält?

616) Gibt es einen zyklischen Linearcode über $\mathbb{Z}_2$, der das Wort $w = 00011101$ enthält?

617) $p(x) = x^3 + 2$ ist erzeugendes Polynom eines zyklischen $(9, 6)$-Linearcodes über $\mathbb{Z}_3$. Man bestimme eine Generatormatrix dieses Codes, die systematisch kodiert.

618) $p(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ ist erzeugendes Polynom eines zyklischen $(8, 5)$-Linearcodes über $\mathbb{Z}_3$. Man bestimme eine Generatormatrix dieses Codes, die systematisch kodiert.

619) Man bestimme das Kontrollpolynom $h(x)$ des Codes aus Bsp. 617) und untersuche, ob jedes Fehlerwort vom Gewicht 1 als Nebenklassenanführer genommen werden kann.

620) Man bestimme das Kontrollpolynom $h(x)$ des Codes aus Bsp. 618) und untersuche, ob jedes Fehlerwort vom Gewicht 1 als Nebenklassenanführer genommen werden kann.